Εξέταση στην Αλγεβρα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Σεπτεμβρίου 2015

Θέμα 1: α) Δώστε παράδειγμα ακέραιας περιοχής, η οποία δεν είναι σώμα και ένα παράδειγμα πρώτου ιδεώδους της. (0,5 μονάδες)

β) Θεωρούμε μια ακέραια περιοχή, ένα ομομορφισμό αντιμεταθετικών δακτυλίων $f\colon A \to B$ και ένα πρώτο ιδεώδες P του B. Εξηγείστε γιατί ο δακτύλιος - πηλίκο $A/f^{-1}[P]$ είναι ακέραια περιοχή. (1,5 μονάδες)

Λύση: α) Πχ, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Πρώτα ιδεώδη του είναι εκείνα της μορφής $p\mathbb{Z}$, όπου p είναι πρώτος αριθμός.

β) Ο δακτύλιος - πηλίκο $A/f^{-1}[P]$ είναι ακέραια περιοχή αν και μόνο αν το ιδεώδες $f^{-1}[P]$ είναι πρώτο, οπότε αποδεικνύουμε ότι το ιδεώδες $f^{-1}[P]$ είναι πρώτο. Αν λοιπόν έχουμε $a_1a_2 \in f^{-1}[P]$, αυτό σημαίνει ότι $f(a_1a_2) \in P$. f είναι ομομορφισμός, οπότε έχουμε ότι $f(a_1)f(a_2) \in P$. Το P είναι πρώτο, οπότε $f(a_1) \in P$ ή $f(a_2) \in P$, ισοδύναμα, $a_1 \in f^{-1}[P]$ ή $a_2 \in f^{-1}[P]$, που σημαίνει ότι το $f^{-1}[P]$ είναι πρώτο.

Θέμα 2: Θεωρούμε τον αντιμεταθετικό δακτύλιο $C([0,1],\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων από το κλειστό διάστημα $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$, με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού κατά όρισμα $((f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x))$ και τη συνάρτηση $\varphi\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(f) = f(\frac{1}{2})$. Αποδείξτε ότι είναι ομομορφισμός, εξηγείστε γιατί το σύνολο

$$I = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$$

είναι ιδεώδες και εξετάστε αν είναι πρώτο κι αν είναι μεγιστικό. (2,5 μονάδες)

Λύση: Τα ουδέτερα στοιχεία για την πράξη της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο δακτύλιο $C([0,1],\mathbb{R})$ είναι οι συναρτήσεις c_0 και c_1 που παίρνουν, αντίστοιχα, σταθερά τιμές 0 και 1. Αυτά διατηρούνται από τον φ αφού $\varphi(c_0) = c_0(\frac{1}{2}) = 0$ και ομοίως για τη c_1. Ο φ διατηρεί την πρόσθεση αφού

$$\varphi(f+g) = (f+g)(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

και, ομοίως, διατηρεί τον πολλαπλασιασμό, άρα είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Το σύνολο $I = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(\frac{1}{2}) = 0\} = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \varphi(f) = 0\} = ker(\varphi)$ είναι απλώς ο πυρήνας του ομομορφισμού φ, άρα είναι ιδεώδες.

Ο ομομορφισμός $\varphi\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ είναι επί, γιατί για κάθε στοιχείο $x_0 \in \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση c_{x_0} με τιμή αυτό το x_0 απεικονίζεται από τον φ στο $\varphi(c_{x_0}) = c_{x_0}(\frac{1}{2}) = x_0$. Επομένως $Im\varphi = \mathbb{R}$ και το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού δίνει $C([0,1],\mathbb{R})/I \cong \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια το πηλίκο $C([0,1],\mathbb{R})/I$ είναι σώμα, άρα το ιδεώδες I ίναι μεγιστικό (επομένως και πρώτο).

Θέμα 3: Αν K είναι ένα σώμα και $a, b \in K$ αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $x + a + b \in K[x]$ διαιρεί το $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 \in K[x]$ (1 μονάδα).

Λύση: Είναι $x+a+b = x-(-a-b)$, οπότε αρκεί να εξετάσουμε κατά πόσο το στοιχείο $-a-b$ είναι ρίζα του $x^3-3abx+a^3+b^3$. Πράγματι είναι

$$x^3-3abx+a^3+b^3 = (-a-b)^3-3ab(-a-b)+a^3+b^3$$

κι επειδή οι τύποι για τα διωνυμικά αναπτύγματα ισχύουν σε αντιμεταθετικούς δακτυλίους έχουμε

$$(-a-b)^3-3ab(-a-b)+a^3+b^3 = -a^3-b^3-3(-a)^2(-b)-3(-a)(-b)^2+3a^2b+3ab^2+a^3+b^3 = 0$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 4: Αν X και Y είναι δύο μη-κενά σύνολα και $\varphi\colon X \to Y$ είναι μία ένα - προς - ένα και επί συνάρτηση, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\hat{\varphi}\colon S_X \to S_Y$ μεταξύ των ομάδων μεταθέσεων των X και Y, που δίνεται από τον τύπο $\hat{\varphi}(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ είναι ισομορφισμός ομάδων. (2 μονάδες)

Λύση: Η $\hat{\varphi}$ είναι ομομορφισμός ομάδων γιατί

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\varphi}(f\circ g) & = & \varphi\circ(f\circ g)\circ\varphi^{-1} \\
\text{ταυτοτική ως ουδέτερο στοιχείο για τη σύνθεση} & = & \varphi\circ(f\circ id_X\circ g)\circ\varphi^{-1} \\
\text{ταυτοτική ως σύνθεση αντιστρόφων} & = & \varphi\circ(f\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ g)\circ\varphi^{-1} \\
\text{προσεταιριστικότητα της σύνθεσης} & = & (\varphi\circ f\circ\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}) \\
 & = & \hat{\varphi}(f)\circ\hat{\varphi}(g)
\end{array}$$

Η $\hat{\varphi}$ είναι ένα - προς - ένα γιατί

$$\hat{\varphi}(f) = \hat{\varphi}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi\circ f\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ g\circ\varphi^{-1}$$

οπότε συνθέτοντας από αριστερά την φ^{-1} κι από δεξιά τη φ προκύπτει $f = g$

Η $\hat{\varphi}$ είναι επί γιατί, για κάθε μετάθεση $h\colon Y \to Y$ του Y, η $f = \varphi^{-1}\circ h\circ\varphi\colon X \to X$ είναι τέτοια ώστε

$$\hat{\varphi}(f) = \varphi\circ(\varphi^{-1}\circ h\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = h.$$

Θέμα 5: α) Δώστε ένα παράδειγμα ομάδας που δεν είναι αντιμεταθετική (0,5 μονάδες).

β) Θεωρούμε μία αλγεβρική δομή M εφοδιασμένη με μία διμελή προσεταιριστική πράξη $\cdot$, για την οποία υπάρχει ουδέτερο στοιχείο 1 (με άλλα λόγια η δομή $(M,\cdot,1)$ είναι δομή μονοειδούς). Αποδείξτε ότι ένα στοιχείο $a \in M$ έχει αντίστροφο ακριβώς όταν υπάρχει $x \in M$ τέτοιο ώστε $a\cdot x\cdot a = 1$ (Υπόδειξη: Η μία κατεύθυνση είναι πολύ εύκολη. Για να αποδείξετε την άλλη πρέπει να βεβαιωθείτε ότι **το ίδιο στοιχείο** λειτουργεί ως αντίστροφο του a και από δεξιά και από αριστερά) (2 μονάδες)

Λύση: α) Ένα απλό τέτοιο παράδειγμα μπορεί να είναι η ομάδα μεταθέσεων S_3. Εκεί οι συνθέσεις $(1\ 2)\cdot(1\ 3)$ και $(1\ 3)\cdot(1\ 2)$ δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα.

β) Αν το στοιχείο a έχει αντίστροφο b, τότε $a\cdot b\cdot a = 1\cdot a = a$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $x \in M$ με $a\cdot x\cdot a = 1$, τότε το στοιχείο $x\cdot a$ είναι δεξιά αντίστροφο του a. Θέλουμε να διαπιστώσουμε ότι είναι και αριστερά αντίστροφο. Πράγματι όμως

$$\begin{array}{rcl}
(x\cdot a)\cdot a & = & (1\cdot(x\cdot a))\cdot a \\
 & = & ((a\cdot x\cdot a)(x\cdot a))\cdot a \\
 & = & (a\cdot x)((a\cdot x\cdot a)\cdot a)
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \cdot x)(1 \cdot a) \\
&= a \cdot x \cdot a \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο.