ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012 ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να ευρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x - y + z + w &= 1 \\ x + 2y - z + 4w &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11w &= a \end{aligned}$$

να έχει τουλάχιστον μια λύση. Για αυτή την τιμή του a να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων ως σύμπλοκο ενός κατάλληλου υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$. Πόση είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του συστήματος;

ΘΕΜΑ 2ο. (2) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ -x - z \\ y \end{pmatrix}.$$

(α) Να ευρεθεί ο πίνακας της f ως προς τη διατεταγμένη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
(β) Να ευρεθεί ο πυρήνας $\mathrm{Ker} f$ της f και μια βάση του.
(γ) Να αποδειχθεί οτι ο $\mathrm{Im} f$ είναι το επίπεδο με εξίσωση $z = x+y$. Είναι η f ισομορφισμός;

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

να ευρεθεί $c \in \mathbb{R}$ ώστε $(I_3 - A)^{-1} = I_3 - c \cdot A$.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(α) Να ευρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να ευρεθούν οι ιδιόχωροι του A.
(γ) Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Να κατασκευαστεί μια ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$ (ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) που περιέχει το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ