

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ 2009 ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
στο Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΘΕΜΑ 1ο. (2) Να επιλυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}2x - 3y + 2z + w &= 0 \\ -4x + 6y + 2w &= 0 \\ 4x - 6y + 8z + 6w &= 0 \\ 2x - 3y + 3z + 2w &= 0\end{aligned}$$

και να ευρεθεί μια βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων. Πόση είναι η τάξη του πίνακα των συντελεστών του συστήματος;

ΘΕΜΑ 2ο. (2) (α) Αν $a, b, c \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}3x - y + 2z &= a \\ 2x + y + z &= b \\ x + 3y &= c\end{aligned}$$

έχει λύση ή λύσεις τότε και μόνον τότε όταν $a - 2b + c = 0$. Αν αυτό συμβαίνει, να περιγραφεί το σύνολο των λύσεων ως σύμπλοκο ενός διανυσματικού υποχώρου του \mathbb{R}^3 .

(β) Εστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα (ως προς την διατεταγμένη κανονική βάση του \mathbb{R}^3) τον

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι η f ισομορφισμός; Αν όχι, να ευρεθεί ο πυρήνας $\text{Ker } f$ και μια βάση του.

(γ) Να ευρεθεί ο $\text{Im } f$ και η διάστασή του. Πόση είναι η τάξη του πίνακα A ; Είναι ο A αντιστρέψιμος;

ΘΕΜΑ 3ο. (3) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του A .

(β) Να ευρεθούν οι ιδιόχωροι του A .

(γ) Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

(δ) Να ευρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε ο SAS^{-1} να είναι διαγώνιος.

ΘΕΜΑ 4ο. (2) Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 (ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) της οποίας δύο διανύσματα να βρίσκονται πάνω στο επίπεδο W με εξίσωση $x + 2y - 2z = 0$.

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Εστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(α) Να ευρεθεί μια ορθοκανονική βάση του \mathbb{R}^3 (ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο) αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A .

(β) Να ευρεθεί ένας ορθογώνιος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε ο SAS^t να είναι διαγώνιος.