

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β,

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΣΕΤΕ ΜΕ ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Α) Στο θρανίο σας πλην ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΛΗΣ, της κόλλας των θεμάτων εξέτασης, και της ταυτότητας, ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΙΠΟΤΑ ΑΛΛΟ.

ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ, Τα κινητά τηλέφωνα θα είναι απολύτως ΚΛΕΙΣΤΑ σε τσάντες και τσέπες.

Β) Για το ΑΡΙΣΤΑ, πρέπει να λυθούν και τα 3 θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικώς ισοδύναμα, δηλ. 3,4 μονάδες έκαστον.

Η ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΕΙΝΑΙ 2.30' ώρες.

Γ) Εάν τυχόν κάποιος ενδιαφερθεί ενδεχομένως μετά την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων να ζητήσει επανεξέταση του γραπτού, θα πρέπει οπωσδήποτε να θυμάται την ΑΙΘΟΥΣΑ και την ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ στα οποία εξετάστηκε.

Δ) ΟΙ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΙ, (εάν το κρίνουν σκόπιμο), δύνανται να στηριχθούν στα παρακάτω:

Δίδονται οι παρακάτω τύποι του βιβλίου, προς προαιρετική χρήση κατά την κρίση σας, η δε ορθή ερμηνεία των επαφίεται στον εξεταζόμενο: Τα σύμβολα a, a', b, b' είναι, σχετικές με τους τύπους, διατεταγμένες βάσεις.

Ισχύουν $(f: a', b') = (I_w: b, b')(f: a, b)(I_v: a', a)$, $[f(x)]_b = (f: a, b)[x]_a$, $(I_v: a', a) = (I_v: a, a')^{-1}$,

ΘΕΜΑ 1. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x + y + z + w &= 0 \\2x + 4y + 2z + 2w &= -2 \\2x + 2y + 4z + 2w &= 4 \\4x + 2y + 2z + 2w &= -4\end{aligned}$$

Εστω A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων.

Α) Να εξετασθεί αν το σύστημα έχει λύσεις και αν έχει να βρεθούν όλες οι λύσεις.

Β) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του A .

Γ) Να εξετασθεί αν ο πίνακας A έχει αντίστροφο και αν έχει να βρεθεί.

Δ) Να εξετασθεί αν οι 4 γραμμές του A αποτελούν βάση για τον \mathbb{R}^4 .

ΘΕΜΑ 2. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ του \mathbb{R}^4 και τα διανύσματα $\alpha = (1, 0, 0, 1)$, $\beta = (2, 0, 0, 1)$, $\gamma = (3, 0, 0, 2)$, $\delta = (1, 9, 3, 13)$.

Α) Να βρεθεί βάση του \mathbb{R}^4 που να περιέχει τα α και β και κάποια διανύσματα της κανονικής βάσης, τα οποία πρέπει να βρείτε.

Β) Εστω X ο υπόχωρος που παράγεται από τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Να βρεθεί μία βάση για τον X .

ΘΕΜΑ 3. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ που έχει τύπο

$$f(x, y, z, w) = (0, y, x - z - w, x - z - w) \text{ με } x, y, z, w \text{ πραγματικούς.}$$

Α) Να βρεθεί μία βάση για τον πυρήνα της f .

Β) Να βρεθεί μία βάση για την εικόνα της f .

Γ) Να βρεθούν δύο διατεταγμένες βάσεις B, B' του \mathbb{R}^4 ώστε ο πίνακας $(f: B, B')$ να έχει σαν στοιχεία μόνον τα 0 και 1.