ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

9 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΤΕ ΤΑ ΚΑΤΩΤΕΡΩ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ ………………………………………………………………………………

ΟΝΟΜΑ…………………………………………………………………..……………..

ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ………..……………………………………………………………

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:

□□□□ □□□□ □□□□□

ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΣΕΤΕ ΜΕ ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

Α) Το ονοματεπώνυμο σας να γραφτεί **καθαρά** ανωτέρω, καθώς και ο **13**-ψηφιος ΑΜ.
Β) Στο θρανίο σας πλην ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΛΗΣ, της κόλλας της θεμάτων-εξέτασης, και της ταυτότητας, **ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΙΠΟΤΑ ΑΛΛΟ. Τα κινητά τηλέφωνα απολύτως ΚΛΕΙΣΤΑ σε τσάντες.**
Γ) Πρέπει να λυθούν και τα **4 θέματα.**
Δ) Δίνεται ο εξής τύπος του βιβλίου, προς **προαιρετική** χρήση κατά την απόλυτη κρίση σας: $[f(x)]_b=(f: a, b)[x]_a$, όπου τα σύμβολα a, b, είναι διατεταγμένες βάσεις..
Ε) Εάν τυχόν κάποιος ενδιαφερθεί ενδεχομένως μετά την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων να ζητήσει επανεξέταση του γραπτού, θα πρέπει να θυμάται **την ΑΙΘΟΥΣΑ και την ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ** στα οποία εξετάστηκε.
Ζ) Ως πρόχειρο θα χρησιμοποιηθούν **αποκλειστικά** οι 3 σελίδες που έχουν την επικεφαλίδα ΠΡΟΧΕΙΡΟ.

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ ΣΑΣ ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

Θέμα 1. Α) Εστω Χ διανυσματικός χώρος,, Α ένα μη κενό υποσύνολο του που είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και χ ένα στοιχείο του Χ που δεν ανήκει στο Α. Εστω ότι το σύνολο AU{χ} είναι γραμμικά εξηρτημένο. Ερωτάται: έπεται εξ αυτού ότι το χ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Α

Β) Θεωρούμε τα 5 στοιχεία του R^4 α=(3, -2, -1, 2), β=(-1, 1, -1, 1), γ=(2, -1, -2, 3), δ=(-1, 1, 0, 0), ε=(0, 0, -1, 1). Να βρεθεί υποσύνολο του {α, β, γ, δ, ε} το οποίο είναι βάση του < α, β, γ, δ, ε>.

ΘΕΜΑ 2. Α) Εστω ότι, Β είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του R, κ θετικός ακέραιος >1, β_1, β_2, ..., β_κ είναι κ διαφορετικά στοιχεία του χώρου που αποτελούν βάση του, α ένα στοιχείο του Β, τα λ_1, λ_2, ..., λ_κ ανήκουν στο R, ισχύει $\lambda_1 \neq 0$ και επιπλέον, ισχύει η ισότητα $\alpha= \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 +... \lambda_\kappa\beta_\kappa$. Ερωτάται: οι υποθέσεις αυτές είναι αρκετές για να συμπεράνουμε ότι τα α, β_2, ..., β_κ αποτελούν και αυτά βάση του Β ?

Β) Δίδονται τα διανύσματα του R^4 α=(1, 1, 0, 1), β=(0, 1, 1, 0), γ=(0, 1, 0, 1), δ=(0, 0, 1, 1), ε=(0, 1, 1, 2), ζ=(0, 2, 2, 2). Δίδεται και ΔΕΝ χρειάζεται να το αποδείξετε, ότι τα σύνολα {α, β, γ, δ} και {ε, ζ} είναι και τα δύο ανεξάρτητα. Ερωτάται : Υπάρχει βάση του R^4 {ε, ζ, χ, ψ}, όπου τα χ, ψ είναι κάποια από τα α, β, γ, δ ? Αν υπάρχει, να βρεθεί μια τέτοια βάση.

ΘΕΜΑ 3. Α) Έστω λ πραγματικός και Α ένας νxν πίνακας με πραγματικούς όρους. Έστω ότι η ορίζουσα του πίνακα $(A-\lambda I_\nu)$ είναι 0. Ερωτάται: Οι προϋποθέσεις αυτές είναι επαρκείς ώστε να εγγυώνται την ύπαρξη διανύσματος χ του $R^{\nu x1}$, διάφορο τουμηδενικού διανύσματος, τέτοιο ώστε Α·χ=λχ.
Β) Εστω ότι α, είναι πραγματικός αριθμός και Α είναι ο 4x4 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha^2-5 & \alpha^3+1 & 2\alpha+3 & 5\alpha^2+2 \\ \alpha^2-5 & 2\alpha^3+5 & 5\alpha+11 & 7\alpha^2+10 \\ \alpha^2-5 & \alpha^3+1 & 3\alpha+6 & 12\alpha^2-7 \\ \alpha^2-5 & \alpha^3+1 & 2\alpha+3 & 6\alpha^2+4 \end{pmatrix}$$

α) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του Α
β) Να βρεθεί για ποιες πραγματικές τιμές του α, ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 4. Α) Έστω ότι κ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, και $ε= (ε_1 , ε_2, ε_3 , . ε_κ)$ $e= (e_1 , e_2, e_3 , . e_μ)$ είναι οι κανονικές διατεταγμένες βάσεις των $R^κ$ και $R^μ$ αντιστοίχως. Εστω $B=(β_{i j})$ ένας κχμ πίνακας και $φ: R^κ \rightarrow R^μ$ είναι η γραμμική απεικόνιση με τύπο $φ(χ)=χ\cdot B$ για κάθε $χ\in R^κ$. Ερωτάται ποιος είναι ο πίνακας (φ: ε, e) ?
Β) Στον διανυσματικό χώρο R^3 θεωρούμε τις δύο διατεταγμένες βάσεις $α= (α_1 , α_2 , α_3)$ $β=(β_1 , β_2 , β_3)$ όπου $α_1 =(2, -1, 0)$ $α_2 =(2, 0, 2)$ $α_3= (0, 1, -1)$, $β_1 =(-1, 3, -2)$, $β_2 =(0, -1, 2)$, $β_3 =(0, 0, -1)$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $φ : R^3 \rightarrow R^3$ που έχει τύπο $φ(χ, ψ, ζ)= (χ-ψ, ψ+ζ, ζ+χ)$
(ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ. Δεν χρειάζεται να αποδειχθεί ότι είναι βάσεις η ότι είναι γραμμική απεικόνιση. Η κανονική διατεταγμένη βάση του R^3 είναι η $(ε_1 , ε_2 , ε_3)$ με $ε_1 =(1,0,0)$, $ε_2 =(0,1,0)$, $ε_3 = (0,0,1)$.
α) Να εκφρασθούν τα $ε_1 , ε_2 , ε_3$, σαν γραμμικός συνδυασμός των $β_1 , β_2 , β_3$.
β) Να εκφρασθούν τα $φ(α_1), φ(α_2), φ(α_3)$, σαν γραμμικός συνδυασμός των $ε_1 , ε_2 , ε_3$.
γ) να βρεθεί ο πίνακας (φ: α, β)

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

ΠΡΟΧΕΙΡΟ