ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Β.ΒΛΑΧΟΥ, Α. ΣΟΥΡΜΕΛΙΔΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
Φθινόπωρο 2013

Θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι για την συγγραφή αυτών των σημειώσεων χρησιμοποιήσαμε ιδιαίτερα α)Το βιβλίο 'Πραγματική Ανάλυση' των Μ. Ανούση, Α. Τσολομύτη και Ε. Φελουζή, β) το βιβλίο "Understanding Analysis" του S. Abbott και γ) τις σημειώσεις 'Ανάλυση: Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής ' του Μ. Παπαδημητράκη. Συμβουλευτήκαμε, επίσης, το βιβλίο 'Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως ' του W. Rudin και το 'Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση' των Σ. Νεγρεπόντη, Θ Ζαχαριάδη, Ν. Καλαμίδα και Β. Φαρμάκη. Τέλος να θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Ε. Ελευθεράκη για τις χειρόγραφες σημειώσεις που μας έδωσε, τις οποίες λάβαμε υπόψιν για το περιεχόμενο των δύο πρώτων κεφαλαίων.

1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Θεώρημα 1.0.1. *(α) Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.*
(β) Κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ άνω φραγμένη και αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Το σύνολο $\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ είναι προφανώς άνω φραγμένο, άρα έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) κάποιο $s \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s.$$

Επιπλέον, από το δεδομένο ότι η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία, για κάθε $n \geq n_0$ θα έχουμε:

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s.$$

Οπότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - s| < \varepsilon$, άρα $a_n \xrightarrow{n\to\infty} s$.
(β) Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κάτω φραγμένη και φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία $\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του (α), γεγονος από το οποίο προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

Θεώρημα 1.0.2. *(Bolzano-Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θα αποδείξουμε ότι έχει μονότονη υπακολουθία.
Τότε αυτή η υπακολουθία θα είναι μονότονη και φραγμένη. Οπότε με βάση την προηγούμενη πρόταση θα είναι συγκλίνουσα.
Ένας φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ ονομάζεται σημείο κορυφής της ακολουθίας $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, αν $a_k \geq a_m, \ \ m \geq k$.
Περίπτωση I: Η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρα σημεία κορυφής $k_1, k_2, \ldots$. Τότε η υπακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ είναι φθίνουσα και έχουμε το ζητούμενο.
Περίπτωση II: Η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε όλα τα $k \geq k_1$ δεν είναι σημεία κορυφής. Επιλέγουμε $k_2 \geq k_1$ τέτοιο ώστε $a_{k_2} \geq a_{k_1}$ (υπάρχει τέτοιος φυσικός γιατί υποθέσαμε ότι το $k_1 \in \mathbb{N}$ δεν είναι σημείο κορυφής). Στην συνέχεια, ακριβώς επειδή και το $k_2 \in \mathbb{N}$ δεν είναι σημείο κορυφής, μπορούμε να επιλέξουμε $k_3 \geq k_2$ τέτοιο ώστε $a_{k_3} \geq a_{k_2}$ και συνεχίζοντας επαγωγικά με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε αύξουσα υπακολουθία της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Πρόταση 1.0.1. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε η ακολουθία $\beta_n = \sup\{a_k, \ k \geq n\}, \ n \in \mathbb{N}$ είναι καλά ορισμένη και φραγμένη.*

Απόδειξη. Εφόσον η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_k, \ k \geq n\}$ είναι άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών άρα έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Οπότε η ακολουθία $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, επειδή όλοι οι όροι της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκουν σε κάποιο κλειστό διάστημα $[-M, M]$ στο ίδιο διάστημα θα ανήκουν και οι όροι της $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, άρα και αυτή η ακολουθία είναι φραγμένη.

Ορισμός 1.0.1. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν*

$$\beta_n = \sup\{a_k,\ k \geq n\} \quad \textit{και}\ \gamma_n = \inf\{a_k :\ k \geq n\},$$

ορίζουμε άνω όριο της a_n και κάτω όριο της a_n να είναι αντίστοιχα

$$\limsup_n a_n = \inf_n \beta_n, \quad \textit{και}\ \liminf_n a_n = \sup_n \gamma_n.$$

Παρατήρηση Όπως είδαμε στην Πρόταση 1.0.1 τα σύνολα $\{a_k,\ k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένα και υπάρχουν τα supremum και τα infimum των συνόλων. Επιπλέον, επειδή η ακολουθία $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη θα συγκλίνει στο $\inf_n \beta_n$. Δηλαδή $\limsup_n a_n = \lim_n \beta_n$. Αντίστοιχα με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι $\liminf_n a_n = \lim_n \gamma_n$.

Παραδείγματα:

1. $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$.
$\beta_n = \frac{1}{n}\ n = 1, 2, \ldots$.
$\gamma_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$.

$$\limsup_n a_n = \lim_n \beta_n = 0 = \lim_n \gamma_n = \liminf_n a_n.$$

2. $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2 \ldots$
$\beta_n = 1\ n = 1, 2, \ldots$.
$\gamma_n = -1, \quad n = 1, 2, \ldots$.

$$\limsup_n a_n = \lim_n \beta_n = 1 \ \text{ και }\ \liminf_n a_n = \lim_n \gamma_n = -1.$$

Ορισμός 1.0.2. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:*

$$\limsup_n a_n = +\infty.$$

Επιπλέον, αν η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει στο $+\infty$ τότε

$$\liminf_n a_n = +\infty.$$

Διαφορετικά το $\liminf_n a_n$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην περίπτωση της φραγμένης ακολουθίας .

Παραδείγματα:

1. Έστω $a_n = n, \quad n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = +\infty.$$

2. Έστω $a_n = [(-1)^n + 1]n + 3, \quad n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\limsup_n a_n = +\infty, \quad \text{και } \liminf_n a_n = 3.$$

Ορισμός 1.0.3. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:*

$$\liminf_n a_n = -\infty.$$

Επιπλέον, αν η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αποκλίνει στο $-\infty$ τότε

$$\limsup_n a_n = -\infty.$$

Διαφορετικά το $\limsup_n a_n$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην περίπτωση της φραγμένης ακολουθίας.

Παραδείγματα:
1. Έστω $a_n = -n, \quad n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = -\infty.$$

2. Έστω $a_n = -[(-1)^n + 1]n + 3, \quad n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\limsup_n a_n = 3, \quad \text{και } \liminf_n a_n = -\infty.$$

Ορισμός 1.0.4. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών που δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη. Τότε:*

$$\limsup_n a_n = +\infty$$

$$\liminf_n a_n = -\infty$$

Παράδειγμα:
Έστω $a_n = (-1)^n n, \quad n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\limsup_n a_n = +\infty \text{ και } \liminf_n a_n = -\infty.$$

Πρόταση 1.0.2. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε*

$$\liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Τότε με τον συμβολισμό του ορισμού 1.0.1 έχω προφανώς ότι $\gamma_n \leq a_n \leq \beta_n, \quad n \in \mathbb{N}$, οπότε και $\lim_n \gamma_n \leq \lim_n \beta_n$. Στην περίπτωση που η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, το συμπέρασμα είναι άμεσο από τους ορισμούς 1.0.2, 1.0.3 και 1.0.4

Θεώρημα 1.0.3. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε:*
(α) Υπάρχει υπακολουθία της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που να συγκλίνει ή να αποκλίνει στο $\limsup_n a_n$.
(β) Υπάρχει υπακολουθία της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που να συγκλίνει ή να αποκλίνει στο $\liminf_n a_n$.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε αρχικά ότι η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.0.1, έχουμε ότι $\limsup_n a_n = \lim_n \beta_n$. Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία να έχει το ίδιο όριο με την $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Για $\sigma = 1$, επειδή $\beta_1 = \sup\{a_k,\ k \geq 1\}$ υπάρχει $k_1 \geq 1$ τέτοιο ώστε $0 < b_1 - a_{k_1} < 1$.
Αντίστοιχα για $\sigma = 2$, επειδή $\beta_{k_1} = \sup\{a_k,\ k \geq k_1\}$, υπάρχει $k_2 \geq k_1$ τέτοιο ώστε $0 < b_{k_1} - a_{k_2} < \dfrac{1}{2}$.
Γενικά για $\sigma \geq 3$, επειδή $\beta_{k_{\sigma-1}} = \sup\{a_k,\ k \geq k_{\sigma-1}\}$ υπάρχει $k_\sigma \geq k_{\sigma-1}$ τέτοιο ώστε $0 < b_{k_{\sigma-1}} - a_{k_\sigma} < \dfrac{1}{\sigma}$.
Τότε η υπακολουθία $\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots\}$ της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει το ίδιο όριο με την $\{\beta_1, \beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots\}$ η οποία ως υπακολουθία της $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.0.2 έχουμε ότι $\limsup_n a_n = +\infty$. Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μια υπακολουθία της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία να αποκλίνει στο $+\infty$.
Επειδή το 1 δεν είναι άνω φράγμα της $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, υπάρχει όρος a_{n_1} μεγαλύτερος του 1.
Επειδή το 2 δεν είναι άνω φράγμα της $\{a_n\}_{n\geq n_1}$ (γιατί;;;), υπάρχει όρος $a_{n_2},\ \ n_2 > n_1$, τέτοιος ώστε $a_{n_2} > 2$.
Γενικά για κάθε $\sigma \in \mathbb{N}$, το σ δεν είναι άνω φράγμα της $\{a_n\}_{n\geq n_{\sigma-1}}$, (γιατί;;;), οπότε υπάρχει όρος $a_{n_\sigma},\ \ n_\sigma > n_{\sigma-1}$, τέτοιος ώστε $a_{n_\sigma} > \sigma$.
Η $\{a_{n_\sigma}\}$ είναι η ζητούμενη υπακολουθία.

Τέλος μένει η περίπτωση $\limsup_n a_n = -\infty$. Αυτό συμβαίνει όταν $\lim_n a_n = -\infty$, οπότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο.
(β) Η απόδειξη είναι ανάλογη του (α).

Πόρισμα 1.0.1. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε*

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = \lim_n a_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε με βάση γνωστό αποτέλεσμα Απειροστικού Λογισμού, όλες οι υπακολουθίες της είναι συγκλίνουσες και έχουν το ίδιο όριο. Οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 1.0.3

2 Τοπολογία Μετρικών Χώρων

2.1 Μετρικοί χώροι

Ορισμός 2.1.1. *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο* X. *Μια απεικόνιση* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *λέγεται μετρική αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*
i) $d(x, y) = 0,\ $ *αν* $x = y$.
ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *για κάθε* $x, y \in X$.
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *για κάθε* $x, y, z \in X$.

Ένα μη κενό σύνολο X εφοδιασμένο με μία μετρική d, ονομάζεται μετρικός χώρος και συμβολίζεται με (X, d).
Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $(\mathbb{R}, d_\delta)$,
$d_\delta(x, y) = \{ \begin{array}{ll} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{array}$
3.$(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$
$d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
4. $(\mathbb{R}^2, d_1)$
$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
5. $(C[0, 1], d_{max})$
$d_{max}(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.
6. $(C[0, 1], d_1)$
$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.
Παρατήρηση: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Τότε αν περιορίσουμε την συνάρτηση d στο $E \times E$, προκύπτει μια μετρική για το σύνολο E. Για τον λόγο αυτό συχνά θα γράφουμε μετρικό χώρο (E, d) και θα εννούμε τον περιορισμό της συνάρτησης d στο $E \times E$.

Ορισμός 2.1.2. *Έστω* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *ακολουθία στοιχείων ενός μετρικού χώρου* (X, d). *Λέμε ότι η* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *είναι συγκλίνουσα ακολουθία αν υπάρχει στοιχείο* $x \in X$ *τέτοιο ώστε* $d(x_n, x) \to 0,\ n \to \infty$. *Σε αυτή τη περίπτωση, το στοιχείο* x *ονομάζεται όριο της ακολουθίας* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $a_n = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$.
$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
2. $(\mathbb{R}, d_\delta)$,
Η ακολουθία $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.
3. $(C[0, 1], d_{max})$, η ακολουθία $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση.

Θεώρημα 2.1.1. *Σε ένα μετρικό χώρο* (X, d), *αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριο είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X τέτοια ώστε

$$x_n \to x \ \text{ και } \ x_n \to y \ \ x, y \in X, \ \ x \neq y.$$

Θέτουμε $\varepsilon = d(x,y) > 0$. Από τα δεδομένα, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_1$. Ομοίως υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$. Τότε:

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \varepsilon,$$

πράγμα άτοπο. Άρα $x = y$.

2.2 Ανοιχτά Σύνολα-Κλειστά Σύνολα

Ορισμός 2.2.1. *Ανοιχτή περιοχή κέντρου $x_0 \in X$ και ακτίνας $r > 0$ ενός μετρικού χώρου (X,d) ονομάζεται το σύνολο*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Παραδείγματα:
1.$(\mathbb{R}, |\cdot|)$,$B(0,1)$.
2. $(\mathbb{R}, d_\delta)$, $B(0,1)$.
3. $(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$, $B(0,1)$.
4. $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $B(0,1)$.
5. $(C[0,1], d_{max})$, $B(0,1)$.
6. $(C[0,1], d_1)$, $B(0,1)$.

Ορισμός 2.2.2. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X,d) ονομάζεται ανοιχτό σύνολο αν για κάθε $a \in A$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(a,r) \subseteq A$.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τα ανοιχτά διαστήματα είναι ανοιχτά σύνολα. Τα ημιάνοιχτα διαστήματα δεν είναι ανοιχτά σύνολα.
2. $(\mathbb{R}, d_\delta)$ κάθε σύνολο είναι ανοιχτό.
3.$(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x > 0\}$ είναι ανοιχτό.

Πρόταση 2.2.1. *Κάθε ανοιχτή περιοχή μετρικού χώρου, είναι ανοιχτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $B(x_0, r)$ μια ανοιχτή περιοχή του. Έστω, επιπλέον, $x \in B(x_0, r)$. Θέτω $\rho = r - d(x, x_0) > 0$. Τότε $B(x, \rho) \subseteq B(x_0, r)$. Πράγματι έστω $y \in B(x, \rho)$. Έπεται:

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \rho + d(x, x_0) = r,$$

οπότε $y \in B(x_0, r)$ και έχω το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε:*
(α) Το $\emptyset$ και το X είναι ανοιχτά σύνολα.
(β) Ένωση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.
(γ) Πεπερασμένη τομή ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου.
(β) Έστω $\{A_i : i \in I\}$ μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων. Θέτω $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Αν $x \in A$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοιχτό A_{i_0}, άρα υπάρχει περιοχή $B(x, r) \subseteq A_{i_0}$. Η ίδια περιοχή περιέχεται και στην ένωση.
(γ) Έστω $\{A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια ανοιχτών συνόλων και έστω $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Έστω, επιπλέον, $x \in A$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένοι θετικοί αριθμοί $r_1, r_2, \dots, r_n$ τέτοιοι ώστε: $B(x, r_i) \subseteq A_i$, $i = 1, 2 \dots, n$. Θέτω $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} > 0$. Τότε $B(x, r) \subseteq A$ και έχω το ζητούμενο.
Ερώτηση: Η απόδειξη 2.2.1 (γ) αποτυγχάνει σε περίπτωση που δεν έχουμε πεπερασμένη οικογένεια ανοιχτών συνόλων. Γιατί;
Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\bigcup_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = (0,1)$$

$$\bigcap_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = [0,1].$$

Ορισμός 2.2.3. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) ονομάζεται G_δ σύνολο, αν είναι ίσο με αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων.*

Παραδείγματα:
1. Στον χώρο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, το σύνολο $(0, 1]$ είναι σύνολο G_δ:

$$(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, 1+\frac{1}{n}\right).$$

Ορισμός 2.2.4. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Ένα σημείο $x_0 \in A$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του A, αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0, r) \subseteq A$.*

Παραδείγματα:
$(\mathbb{R}, |\cdot|)$
1. $(3, 5]$ όλα τα σημεία εσωτερικά εκτός του 5.
2. $\mathbb{N}$ κανένα σημείο εσωτερικό.
3. $\mathbb{Q}$ κανένα σημείο εσωτερικό.

Ορισμός 2.2.5. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A ονομάζεται εσωτερικό του συνόλου A και συμβολίζεται με A^o.*

Παραδείγματα:
1. $(3,5]^o = (3,5)$.
2. $\mathbb{N}^o = \mathbb{Q}^o = \emptyset$.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Τότε το A^o είναι ανοιχτό υποσύνολο του A.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in A^o$. Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(x_0,r) \subseteq A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $B(x_0,r) \subseteq A^o$.
Έστω $x \in B(x_0,r)$. Τότε όπως και στην πρόταση 2.2.1, αν θέσουμε $\varrho = r - d(x,x_0) > 0$, έπεται ότι:
$$B(x,\varrho) \subseteq B(x_0,r) \subseteq A \Rightarrow x \in A^o \Rightarrow B(x_0,r) \subseteq A^o.$$

Ορισμός 2.2.6. *Ενα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X,d) ονομάζεται φραγμένο, αν περιέχεται σε ανοιχτή περιοχή κάποιου στοιχείου.*

Παραδείγματα:
1. Οι ανοιχτές περιοχές είναι φραγμένα σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο.
2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ το σύνολο $(0,\infty)$ δεν είναι φραγμένο.

Ορισμός 2.2.7. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Ένα σημείο $x \in X$ ονομάζεται σημείο συσώρευσης συνόλου A, αν κάθε περιοχή του τέμνει το σύνολο $A \setminus \{x\}$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου A το συμβολίζουμε με A'.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = (a,b)$, $A' = [a,b]$.
2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $A' = \{0\}$.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αν και μόνο αν, υπάρχει ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A \setminus \{x\}$ που να συγκλίνσει στο x.*

Απόδειξη.
Ευθύ: Έστω $x \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία στοιχείων του $A \setminus \{x\}$, που να συγκλίνει στο x.
Εφαρμόζοντας τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης για την ανοιχτή περιοχή $B(x,1)$, προκύπτει ότι υπάρχει $x_1 \in B(x,1) \cap (A \setminus \{x\})$. Δηλαδή υπάρχει $x_1 \in A \setminus \{x\}$ τέτοιο ώστε $d(x_1,x) < 1$.

Επαναλαμβάνοτας το ίδιο επιχείρημα για την περιοχή $B(x,\dfrac{1}{2})$, καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $x_2 \in A \setminus \{x\}$ τέτοιο ώστε $d(x_2,x) < \dfrac{1}{2}$.
Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία στοιχείων του $A \setminus \{x\}$,

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με την εξής ιδιότητα:

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα $d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ και έχουμε το ζητούμενο.
Αντίστροφο: Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $A \setminus \{x\}$ που συγκλίνει στο x. Έστω, επιπλέον, $B(x, r)$ μια ανοιχτή περιοχή του x. Από τα δεδομένα έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(a_n, x) < r$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $a_n \in B(x, r)$ για κάθε $n \geq n_0$.
Επειδή $a_n \in A \setminus \{x\}$, έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός 2.2.8. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in A$ ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του A, αν υπάρχει ανοικτή περιοχή $B(x, r)$, $r > 0$, τέτοια ώστε $B(x, r) \cap A = \{x\}$.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $A = (3, 4) \cup \{5\}$. Το 5 μεμονωμένο σημείο του A.
2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Όλα τα σημεία του A είναι μεμονωμένα σημεία του.
3. $(\mathbb{R}, d_\delta)$. Όλα τα σημεία είναι μεμονωμένα.

Ορισμός 2.2.9. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ένα σημείο $x \in X$ είναι συνοριακό σημείο του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει ότι $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Το σύνολο των συνοριακών σημείων ενός συνόλου A συμβολίζεται με ∂A.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Τα συνοριακά σημεία του $\mathbb{Q}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$.
2. $(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$. Συνοριακά σημεία μιας ανοιχτής μπάλας $B((x_0, y_0), r)$ είναι τα στοιχεία του $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda}((x, y), (x_0, y_0)) = r\}$.

Ορισμός 2.2.10. *Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X, d) ονομάζεται κλειστό αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $[a, b]$.
2. Στην διακριτή μετρική όλα είναι κλειστά.

Θεώρημα 2.2.3. *Ένα σύνολο είναι κλειστό, αν και μόνο αν, το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.*

Απόδειξη. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$.
Ευθύ: Υποθέτουμε ότι το E είναι κλειστό. Θα αποδείξουμε ότι το E^c είναι ανοιχτό.
Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι ανοιχτό και να καταλήξουμε σε άτοπο.
Τότε υπάρχει $a \in E^c$ για το οποίο ισχύει ότι:
Για κάθε $r > 0$, $B(a, r) \nsubseteq E^c$ δηλαδή $B(a, r) \cap E \neq \emptyset$.
Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το a είναι σημείο συσσώρευσης του E και επειδή το E είναι κλειστό, $a \in E$. Άτοπο.

Αντίστροφο: Έστω ότι το E^c είναι ανοικτό. Θα αποδείξουμε ότι το E είναι κλειστό. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι κλειστό να καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε θα υπάρχει $a \in \overline{E} \setminus E$. Επειδή $a \in E^c$ και επειδή το E^c είναι ανοικτό, υπάρχει ανοικτή περιοχή του a, $B(a,r)$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$B(a,r) \subseteq E^c \Rightarrow B(a,r) \cap E = \emptyset.$$

Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι $a \in \overline{E}$.

Παραδείγματα:

1. $(3,4)^c = (-\infty,3] \cup [4,\infty)$.
2. $\Big([1,2] \cup \{5\}\Big)^c = (-\infty,1) \cup (2,5) \cup (5,\infty)$

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τότε:*
(a) Το $\emptyset$ και το X είναι κλειστά σύνολα.
β) Τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
γ) Πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με βάση το Θεώρημα 2.2.1, το Θεώρημα 2.2.3 και τους τύπους του Morgan $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ και $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$, όπου συμβολίζουμε $A^c = X \setminus A$:

α) Όπως έχουμε ήδη αποδείξει, το $\emptyset$ και το X είναι ανοικτα σύνολα οπότε το $X = \emptyset^c$ και το $\emptyset = X^c$ είναι κλειστά σύνολα.
β) Έστω $\{E_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών συνόλων. Τότε τα E_i^c, $i \in I$ είναι ανοικτα σύνολα. Επομένως το σύνολο $\bigcup_{i\in I} E_i^c$ είναι ανοικτό. Οπότε $E = \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} (E_i^c)^c = \left(\bigcup_{i\in I} E_i^c\right)^c$ είναι κλειστό σύνολο.
γ) Έστω $\{E_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών συνόλων και έστω $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Τα E_i^c, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ είναι ανοικτά σύνολα. Άρα $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$ είναι ανοικτό σύνολο. Οπότε $E = \bigcup_{i=1}^n E_i = \bigcup_{i=1}^n (E_i^c)^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right)^c$ είναι κλειστό σύνολο.

Ορισμός 2.2.11. *Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X,d) ονομάζεται F_σ σύνολο, αν είναι ίσο με αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.*

Παράδειγμα:
$(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Το $(0,1)$ είναι σύνολο F_σ:

$$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}\right]$$

Ορισμός 2.2.12. *Έστω E υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Κλειστότητα του συνόλου E ονομάζεται το σύνολο $\overline{E} = E \cup E'$.*

Παραδείγματα:
1.$(\mathbb{R}, |\cdot|)$. $A=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$, $A'=\{0\}$, $\overline{A}=\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$.
2.$(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$, $A'=A$, $\overline{A}=A$.

Πρόταση 2.2.3. *Η κλειστότητα ενός συνόλου E είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το σύνολο E.*

Απόδειξη. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $E\subseteq X$. Πρώτα θα δείξουμε ότι το $\overline{E}=E\cup E'$ είναι κλειστό. Με βάση την Πρόταση 2.2.3, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{E}^c$ είναι ανοικτό:
Έστω, λοιπόν, $x_0\in\overline{E}^c$. Τότε $x_0\notin E$ και $x_0\notin E'$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε $B(x_0,r)\cap E=\emptyset$. Πράγμα που σημαίνει ότι $B(x_0,r)\subseteq E^c$.
Ισχυρισμός: $B(x_0,r)\subseteq E'^c$.
Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $x\in B(x_0,r)$. Θέτουμε $\rho=r-d(x,x_0)>0$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $B(x,\rho)\subseteq B(x_0,r)$. Οπότε $B(x,\rho)\cap E=\emptyset$ και αυτό άμεσα μας δίνει ότι το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου E.
Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι $B(x_0,r)\subseteq E^c\cap E'^c=\overline{E}^c$ και έχουμε το ζητούμενο.
Μένει να δείξουμε ότι $\overline{E}$ είναι το μικρότερο κλειστό που περιέχει το E. Αρκεί να δείξουμε ότι αν F κλειστό σύνολο και $F\subseteq E$, τότε $\overline{E}\subseteq F$.
Έστω $a\in\overline{E}$. Τότε $a\in E$ ή $a\in E'$.
-Αν $a\in E$, τότε $a\in F$ $(E\subseteq F)$.
-Αν $a\in E'$, τότε $\forall r>0$, $B(a,r)\cap E\setminus\{a\}\neq\emptyset$. Άρα $\forall r>0$, $B(a,r)\cap F\setminus\{a\}\neq\emptyset$, $(E\subseteq F)$.
Αυτό σημαίνει ότι το a σημείο συσσώρευσης του F και επειδη το F κλειστο, $a\in F$.
Όποτε κάθε σημείο του $\overline{E}$ είναι και σημείο του F.

Ορισμός 2.2.13. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$ μη κενό. Ονομάζουμε διάμετρο του A:*

$$diamA=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}.$$

Παραδείγματα:
1.$(\mathbb{R}, |\cdot|)$. $A=(1,2)\cup[3,5]$, $diamA=5$.
2.$(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$. $A=B((0,0),r)$, $diamA=2r$.
3.$(\mathbb{R}, d_\delta)$. Αν $A=\{5\}$, τότε $diamA=0$. Κάθε σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ που περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία έχει $diamA=1$.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$ μη κενό. Τότε:*

$$diamA=diam\overline{A}.$$

Απόδειξη. Έστω $A\subseteq(X,d)$. Επειδή $A\subseteq\overline{A}$ έχουμε:

$$\{d(x,y):\ x,y\in A\}\subseteq\{d(x,y):\ x,y\in\overline{A}\}.$$

Οπότε $diamA\leq diam\overline{A}$. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $diamA\geq diam\overline{A}$.
Έστω $\varepsilon>0$. Από τον ορισμό του supremum, υπάρχουν $x_0,y_0\in\overline{A}$ τέτοια ώστε

$$diam\overline{A}-\varepsilon<d(x_0,y_0).$$

Επειδή $x_0 \in \overline{A}$, $B(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$.
Μπορώ, λοιπόν, να επιλέξω $a \in A: \quad d(x_0, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Για τον ίδιο λόγο, μπορώ να επιλέξω $b \in A: \quad d(y_0, b) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Έχουμε:

$$diam\overline{A} - \varepsilon < d(x_0, y_0) \leq d(x_0, a) + d(a, b) + d(b, y_0) < \varepsilon + d(a, b) \leq \varepsilon + diamA.$$

Δηλαδή για τυχαίο $\varepsilon > 0$ αποδείξαμε ότι $diamA > diam\overline{A} - 2\varepsilon$.
Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός 2.2.14. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $M \subseteq X$. Το M λέγεται πυκνό υποσύνολο του X αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m \in M$ τέτοιο ώστε $d(x, m) < \varepsilon$. Δηλαδή $\overline{M} = X$.*

Παραδείγματα:
Οι ρητοί και οι άρρητοι στο $\mathbb{R}$ και τα ζεύγη ρητών στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 2.2.15. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει $M \subseteq X$ το οποίο είναι πυκνό κι αριθμήσιμο.*

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ διαχωρίσιμος.
2. $(\mathbb{R}, d_\delta)$ όχι διαχωρίσιμος.
3. $(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$ διαχωρίσιμος.

2.3 Πληρότητα

Ορισμός 2.3.1. *Μία ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενός μετρικού χώρου (X, d) ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon)$ ώστε $\forall n, m \geq n_0$, με $n, m \in \mathbb{N}$ να ισχύει $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*

Παραδείγματα:
1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy στον $\mathbb{R}$.
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ όχι Cauchy στον $(\mathbb{R}, d_\delta)$.

Πρόταση 2.3.1. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω μία ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενός μετρικού χώρου (X, d) που συγκλίνει σε ένα $a \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Για αυτό το ε, υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $\forall n \geq n_0$ με $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Οπότε για $n, m \geq n_0$ έπεται ότι:

$$d(a_n a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και άρα η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.
Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παράδειγμα:
Έστω a ένας άρρητος αριθμός. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, υπάρχει ακολουθία ρητών $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο a. Τότε η $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, με βάση την πρόταση 2.2 είναι Cauchy ως συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$ με την απόλυτη τιμή. Δηλαδή βρέθηκε ακολουθία του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ η οποία είναι Cauchy αλλά δεν είναι συγκλίνουσα στο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

Πρόταση 2.3.2. *Μια ακουλουθία Cauchy που έχει συγκλίνουσα υπακολουθία συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy ενός μετρικού χώρου (X, d) και $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα υπακολουθία της, δηλαδή υπάρχει $a \in X$ στο οποίο η $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.
Έστω, επιπλέον, $\varepsilon > 0$. Τότε:
(α) υπάρχει φυσικός αριθμός n_1, τέτοιος ώστε $\forall n, m \geq n_1$, $d(a_n, a_m) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
και
(β) υπάρχει φυσικός αριθμός n_2, τέτοιος ώστε $\forall n \geq n_2$, $d(a_{k_n}, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Θέτουμε $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Τότε για $n \geq n_0$ έχουμε ότι:

$$d(a_n, a) \leq d\left(a_n, a_{k_{n_0}}\right) + d\left(a_{k_{n_0}}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

(παρατηρείστε ότι $k_{n_0} \geq n_0$). Άρα η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο a.

Πρόταση 2.3.3. *Μια ακουλουθία Cauchy είναι φραγμένη.*
Απόδειξη. *Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy ενός μετρικού χώρου (X, d) και A το σύνολο των όρων της. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το A είναι φραγμένο υποσύνολο του X.*
Για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$d(a_n, a_m) < 1, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Δηλαδή:

$$d(a_n, a_{n_0}) < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Θέτοντας $M = max\{\{d(a_n, a_{n_0}) : 1 \leq n < n_0\} \cup \{1\}\}$ ισχύει ότι:

$$d(a_n, a_{n_0}) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$a_n \in B(a_{n_0}, M) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή $A \subseteq B(a_{n_0}, M)$ και άρα φραγμένο.

Ορισμός 2.3.2. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy του χώρου συγκλίνει μέσα σε αυτόν.*

Θεώρημα 2.3.1. *Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη (πρόταση 2.3.3) και άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (θεώρημα 1.0.2). Η $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Οπότε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ (πρόταση 2.3.2) και άρα ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης.

Παραδείγματα:
1. $(\mathbb{R}^2, d_1)$ πλήρης.
2. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ όχι πλήρης.

Πρόταση 2.3.4. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Το E είναι κλειστό υποσύνολο του (X, d) αν και μόνο αν (E, d) πλήρης μετρικός χώρος.*

Απόδειξη.
Ευθύ: Έστω E κλειστό υποσύνολο του X και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του E. Θα αποδείξουμε ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε στοιχείο του E.
Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προφανώς ακολουθία Cauchy του X και επειδή ο X είναι πλήρης η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $x \in X$.
Αυτό σημαίνει, όμως, ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του E ή το $x \in E$. Σε κάθε περίπτωση $x \in E$, εφόσον E κλειστό. Άρα (E, d) πλήρης.

Αντίστροφο: Έστω ότι ο E είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X και έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του E τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \in E$.
Η $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα άρα είναι και Cauchy ακολουθία του πλήρη χώρου E. Άρα συγκλίνει στο E, δηλαδή $x \in E$.

Πρόταση 2.3.5. *Για κάθε μετρικό χώρο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο X είναι πλήρης.
(ii) Αν $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X ώστε $diam K_n \to 0$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Απόδειξη.
<u>$(i) \Rightarrow (ii)$</u>
Έστω ότι ο X είναι πλήρης και έστω $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X ώστε $diam K_n \to 0$. Για κάθε n επιλέγουμε $x_n \in K_n$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε $diam K_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.
Αν $n, m \geq n_0 \Rightarrow x_n, x_m \in K_{n_0}$. Άρα $d(x_n, x_m) \leq diam K_{n_0} < \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$. Δηλαδή η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy του X. Επειδή ο X πλήρης, υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$.
Αν $m \geq n \Rightarrow K_m \subseteq K_n \Rightarrow x_m \in K_n$, $\forall m \geq n$
Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η υπακολουθία $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ περιέχεται στο K_n και επειδή το σύνολο αυτό είναι κλειστό και το όριό της περιέχεται στο K_n. Άρα $x \in K_n$. Συνεπώς

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$
Έστω ότι ισχύει το (ii). Θα δείξουμε ότι ο X είναι πλήρης:
Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του X. Ορίζουμε $L_m = \{x_n : n \geq m\}$ και $K_m = \overline{L_m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $\{K_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων. Επίσης ισχύει ότι $diam L_m = diam K_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (βλ. Πρόταση 2.2.4).
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy , υπάρχει m_0 ώστε:
$d(x_n, x_k) < \varepsilon$, $\forall n, k \geq m_0$
$\Rightarrow d(x_n, x_k) < \varepsilon$, $\forall n, k \geq m$ και $\forall m \geq m_0$
$\Rightarrow diam L_m \leq \varepsilon$, $\forall m \geq m_0$
$\Rightarrow diam K_m \leq \varepsilon$, $\forall m \geq m_0$
$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} diam K_m = 0$
Τότε από υπόθεση, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Θα υπάρχει n_0 ώστε $diam K_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.
Επειδή $x, x_n \in K_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) \leq diam K_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$. Άρα $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$ και άρα ο X πλήρης.

Θεώρημα 2.3.2. *(Baire) Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανοιχτά και πυκνά υποσύνολα του X. Τότε $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Άρκει να δείξουμε ότι $B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$.
Επειδή $\overline{A_1} = X \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap A_1 \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x \in B(x,\varepsilon) \cap A_1$.
Το $B(x,\varepsilon) \cap A_1$ είναι ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $0 < \tilde{\varepsilon} < 1$ ώστε $B(x_1, \tilde{\varepsilon}) \subseteq B(x,\varepsilon) \cap A_1$.

Επιλέγουμε $0 < \varepsilon_1 < \tilde{\varepsilon}$. Τότε $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subseteq B(x_1, \tilde{\varepsilon}) \subseteq B(x,\varepsilon) \cap A_1$.
Επειδή $\overline{A_2} = X \Rightarrow B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_2 \in B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$
Το $B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$ είναι ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ ώστε $\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subseteq B(x_1, \varepsilon_1) \cap A_2$.
Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:
$x_{n+1} \in B(x_n, \varepsilon_n) \cap A_{n+1}$, $0 < \varepsilon_n < \dfrac{1}{n}$ και $\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \subseteq B(x_n, \varepsilon_n) \cap A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Παρατηρούμε ότι $diam\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \leq \dfrac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ και $\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \subseteq \overline{B(x_n, \varepsilon_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (φθίνουσα ακολουθία κλειστών και μην κενών συνόλων). Από την προηγούμενη πρόταση: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \neq \emptyset \Rightarrow$ υπάρχει $z \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subseteq \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subseteq B(x,\varepsilon)$ και επίσης $z \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Άρα $B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$

Παράδειγμα: Δεν ισχύει το θεώρημα αν ο χώρος δεν είναι πλήρης.
Θεωρούμε το μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, μπορούμε να γράψουμε μια

αρίθμηση του $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$.
Τα $A_1 = \mathbb{Q} \setminus \{q_1\}$, $A_2 = \mathbb{Q} \setminus \{q_2\}, \ldots$ είναι ανοικτά (ως πεπερασμένη τομή ανοικτών) και πυκνά (για κάθε ρητό, υπάρχει ακολουθία ρητών που συγκλίνει σε αυτό το ρητό) υποσύνολα του $\mathbb{Q}$. Όμως $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Πόρισμα 2.3.1. *Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και F_n, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Αν $(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)^o \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $F_{n_0}^o \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^o$.
Έστω ότι ${F_n}^o = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Τότε $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus {F_n}^o = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $X \setminus F_n$ ανοικτό (ως συμπλήρωμα κλειστού) και πυκνό υποσύνολο του X, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από θεώρημα Baire το
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)$ είναι πυκνό:

$$X = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)} = \overline{X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^o \neq X. \text{ Άτοπο}$$

Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ${F_{n_0}}^o \neq \emptyset$.

Πόρισμα 2.3.2. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι F_σ και δεν είναι G_δ.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το $F_n = \{q_1, \ldots, q_n\}$ είναι κλειστό $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:
$\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Είναι δηλαδή F_σ σύνολο.

Έστω ότι $\mathbb{Q}$ είναι G_δ σύνολο. Τότε $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$, όπου V_n ανοικτό $\forall n \in \mathbb{N}$.
Επειδή $\mathbb{Q} \subseteq V_n \Rightarrow \overline{V_n} = \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Επίσης το $U_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Άρα από το θεώρημα Baire θα πρέπει το

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$$

να είναι πυκνό του $\mathbb{R}$. Άτοπο

2.4 Συμπάγεια

Ορισμός 2.4.1. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Λέμε ότι μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων $A_i : i \in I$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του E, αν και μόνο αν, $E \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.*

Παραδείγματα:
1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε $\{X\}$ αποτελεί κάλυψη οποιουδήποτε $E \subseteq X$.

2. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $E\subseteq X$. Τότε $\{B(x,r):\ x\in E\}$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του E, για κάθε $r>0$.
3. Έστω $(\mathbb{R},|\cdot|\,)$. Τότε $(\frac{1}{n},1):n\in\mathbb{N}$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του (0,1).

Ορισμός 2.4.2. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $K\subseteq X$. Το K καλείται συμπαγές αν κάθε ανοικτή κάλυψη του, έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή αν $A_i : i\in I$ οικογένεια ανοικτών με $K\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_i$, τότε υπάρχει $\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}\subseteq I$ ώστε $K\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_{i_k}$.*

Παράδειγμα:
1. $(\mathbb{R},|\cdot|\,)$, το $(0,1]$ δεν είναι συμπαγές, αφού

$$(0,1]\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n},1],$$

αλλά δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Θεώρημα 2.4.1. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου είναι φραγμένο.*

Απόδειξη.

Έστω X,d μετρικός χώρος και $K\subseteq X$ συμπαγές. Έστω, επιπλέον, $x_0\in K$. Τότε η οικογένεια των ανοιχτών περιοχών $\{B(x_0,n):n\in\mathbb{N}\}$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του K. Άρα υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$K\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}B(x_0,n),$$

δηλαδή $K\subseteq B(x_0,N)$ και έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.4.2. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

Απόδειξη.

Έστω X,d μετρικός χώρος και $K\subseteq X$ συμπαγές. Έστω ότι το K δεν είναι κλειστό. Τότε υπάρχει $x\in\overline{K}\setminus K$. Η οικογένεια $\overline{B}(x,\frac{1}{n})^c$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του K. Οπότε έχω πεπερασμένη υποκάλυψη

$$\overline{B}(x,\frac{1}{n_1})^c,\overline{B}(x,\frac{1}{n_2})^c,\ldots,\overline{B}(x,\frac{1}{n_k})^c.$$

Θέτω $n_0=\max n_1,n_2,\ldots,n_k$. Τότε $K\in\overline{B}(x,\frac{1}{n_0})^c$, άρα το x δεν ανήκει στο K και δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πράγμα άτοπο.

Πρόταση 2.4.1. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου και $L\subseteq K$ κλειστό. Τότε L συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω L κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου K σε ένα μετρικό χώρο (X,d). Θεωρώ $G_i: \ i \in I$ μια ανοιχτή κάλυψη του συνόλου L. Στόχος είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{G_i: \ i \in I\} \cup \{L^c\}$ αποτελεί ανοιχτή κάλυψη του K. Επειδή υποθέσαμε ότι το K είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{G_1, G_2, \ldots, G_n, L^c\}$. Δηλαδή $K \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n \cup L^c$.
Προφανώς τότε $L \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$ και βρήκαμε την πεπερασμένη υποκάλυψη που αναζητούσαμε.

Ορισμός 2.4.3. *Έστω K υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Το K ονομάζεται ακολουθιακά συμπαγές αν κάθε ακολουθία στοιχείων του K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία της οποίας το όριο επίσης ανήκει στο K.*

Πρόταση 2.4.2. *Έστω K ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,d). Τότε το K έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.*

Απόδειξη. Σταθεροποιώ τυχαίο $\delta > 0$ και $x_1 \in K$.
Βήμα 1ο:
Περίπτωση Ι: Υπάρχει στοιχείο του K, που να απέχει από το x_1 απόσταση τουλάχιστον δ. Τότε συμβολίζω αυτό το στοιχείο με x_2^δ και συνεχίζω στο δεύτερο βήμα.
Περίπτωση ΙΙ: Δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο και σταματάω.
Βήμα 2ο:
Περίπτωση Ι: Υπάρχει $x_3^\delta \in K$ τέτοιο ώστε

$$d(x_1, x_3^\delta) \geq \delta \text{ και } d(x_2^\delta, x_3^\delta) \geq \delta.$$

Τότε συνεχίζω στο 3ο βήμα.
Περίπτωση ΙΙ: Δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο και σταματάω.
Βήμα 3ο:
Περίπτωση Ι: Υπάρχει $x_4^\delta \in K$ που να απέχει από τα στοιχεία του συνόλου $\{x_1, x_2^\delta, x_3^\delta\}$ απόσταση τουλάχιστον δ.
Περίπτωση ΙΙ: Δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο και σταματάω.
Με τον τρόπο που περιγράφουμε συνεχίζουμε να εκτελούμε βήματα.
Ισχυρισμός: Μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα καταλήξουμε στην Περίπτωση ΙΙ και θα σταματήσουμε την διαδικασία.
Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και έστω ότι μπορούμε επαγωγικά να ακολουθήσουμε τα βήματα που περιγράφονται άπειρες φορές. Τότε θα έχουμε καταφέρει να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\{x_1, x_2^\delta, x_3^\delta, \ldots\}$ στοιχείων του K τέτοια ώστε:

$$d(x_n^\delta, x_m^\delta) \geq \delta, \ \ \forall \, n, m \in \mathbb{N}, \ n \neq m$$

(συμβολίζουμε για λόγους ομοιομορφίας $x_1 = x_1^\delta$).
Με βάση την υπόθεση της πρότασης, αυτή η ακολουθία πρέπει να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Σύμφωνα με την πρόταση 2.3.1, αυτή η υπακολουθία πρέπει να είναι Cauchy, πράγμα άτοπο λόγω των παραπάνω αποστάσεων. Άρα ο ισχυρισμός αληθεύει.

Συνεπώς αν επιλέξουμε $\delta = 1$ και τυχαίο $x_1 \in K$, ακολουθώντας πεπερασμένα το πλήθος βήματα, έστω n_1, θα καταλήξουμε σε ένα πεπερασμένο σύνολο $D_1 = \{x_1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_{n_1}^1\}$ στοιχείων του K με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$d(x_n^1, x_m^1) \geq 1, \;\; \forall\, n, m \in \{1, 2, \dots, n_1\}, \; n \neq m$$

και

Για κάθε $x \in K$, υπάρχει $\overline{x} \in D_1$, τέτοιο ώστε $d(x, \overline{x}) < 1$.

Γενικά, για κάθε φυσικό αριθμό $\sigma \in \mathbb{N}$ και τυχαίο $x_1 \in K$, ακολουθώντας πεπερασμένα το πλήθος βήματα, έστω n_σ, θα καταλήξουμε σε ένα πεπερασμένο σύνολο $D_\sigma = \{x_1, x_2^\sigma, x_3^\sigma, \dots, x_{n_\sigma}^\sigma\}$ στοιχείων του K με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$d(x_n^\sigma, x_m^\sigma) \geq \frac{1}{\sigma}, \;\; \forall\, n, m \in \{1, 2, \dots, n_\sigma\}, \; n \neq m$$

και

Για κάθε $x \in K$, υπάρχει $\overline{x} \in D_\sigma$, τέτοιο ώστε $d(x, \overline{x}) < \dfrac{1}{\sigma}$.

Θέτω $D = \bigcup_{\sigma=1}^{\infty} D_\sigma$. Τότε το D είναι προφανώς αριθμήσιμο υποσύνολο του K. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι πυκνό. Για τον λόγο αυτό σταθεροποιούμε $x \in K$ και $\varepsilon > 0$.
Τότε υπάρχει $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{\sigma_0} < \varepsilon$.
Από την κατασκευή του D_{σ_0}, υπάρχει $\overline{x} \in D_{\sigma_0}$, τέτοιο ώστε $d(x, \overline{x}) < \dfrac{1}{\sigma_0}$. Δηλάδή υπάρχει στοιχείο του D (το $\overline{x}$), τέτοιο ώστε $d(x, \overline{x}) < \varepsilon$ και έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.4.3. *Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι συμπαγές, αν και μόνο αν, είναι ακολουθιακά συμπαγές*

Απόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Θα αποδείξουμε ότι είναι ακολουθιακά συμπαγές. Έστω $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία στοιχείων του K. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο μέσα στο K.
Θέτουμε $E = \{y \in K : \; \exists n \in \mathbb{N} \; y = x_n\}$ το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Περίπτωση I: Το E έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία. Τότε υπάρχει σταθερή υπακολουθία της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, η οποία είναι προφανώς συγκλίνουσα.
Περίπτωση II: Έστω ότι το E είναι άπειρο υποσύνολο του K.
Ισχυρισμός: Υπάρχει στοιχείο του συνόλου K που να είναι σημείο συσσώρευσης του συνολου E.
Απόδειξη ισχυρισμού: Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο στοιχείο του K.
Τότε για κάθε $p \in K$, υπάρχει $\varepsilon_p > 0$, τέτοιο ώστε

$$B(p, \varepsilon_p) \cap (E \setminus \{p\}) = \emptyset.$$

Δηλάδη το μόνο στοιχείο του συνόλου E που ενδέχεται να περιέχεται στην ανοιχτή μπάλα $B(p, \varepsilon_p)$ είναι το p.
Τότε $K \subseteq \bigcup_{p \in K} B(p, \varepsilon_p)$ και επειδή το K είναι συμπαγές προκύπτει ότι:

$$K \subseteq B(p_1, \varepsilon_{p_1}) \cup B(p_2, \varepsilon_{p_2}) \cup \ldots \cup B(p_n, \varepsilon_{p_n})$$

(υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.)
Μα τότε:

$$E = K \cap E \subseteq [B(p_1, \varepsilon_{p_1}) \cup B(p_2, \varepsilon_{p_2}) \cup \ldots \cup B(p_n, \varepsilon_{p_n})] \cap E \subseteq \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}.$$

Δεν γίνεται ένα σύνολο με άπειρο το πλήθος στοιχεία (όπως το E) να περιέχεται σε σύνολο με πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Καταλήξαμε, λοιπόν, σε άτοπο πράγμα που αποδεικνύει την ορθότητα του ισχυρισμού.
Έστω, λοιπόν, $p \in K$ σημείο συσσώρευσης του συνόλου E. Υπάρχει $y_1 \in E$ τέτοιο ώστε $d(y_1, p) < 1$. Τότε $y_1 = x_{n_1}$ για κάποιο φυσικό αριθμό n_1. Θεωρώ $E_1 = \{y \in K : \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1\ y = x_n\}$. Τότε το p είναι σημείο συσσώρευσης του E_1 (γιατί;), οπότε υπάρχει $x_{n_2} \in E$, $n_2 \geq n_1$ τέτοιο ώστε $d(x_{n_2}, p) < \dfrac{1}{2}$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα αριθμήσιμες το πλήθος φορές, κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ για την οποία ισχύει $d(x_{n_k}, p) < \dfrac{1}{k}$.
Δηλαδή $x_{n_k} \xrightarrow{n \to \infty} p$ και έχουμε το ζητούμενο.
Για το αντίστροφο του θεωρήματος, θεωρούμε ότι το σύνολο K είναι ακολουθιακά συμπαγές και θα αποδείξουμε ότι είναι συμπαγές.
Έστω $\{G_i :\ i \in I\}$ μια ανοιχτή κάλυψη του K. Με βάση την Πρόταση 2.4.2, το K περιέχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$.
Σταθεροποιώ τυχαίο $x \in K$. Τότε $x \in G_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in I$. Επειδή το G_{i_0} είναι ανοιχτό σύνολο, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G_{i_0}$. Επιλέγω ρητό αριθμό $q_{n_0} \in (0, \dfrac{\varepsilon}{2})$. Τότε υπάρχει στοιχείο $x_{n_0} \in D$ τέτοιο ώστε $d(x, x_{n_0}) < q_{n_0}$.
Δηλαδή για τυχαίο $x \in K$ βρήκα δίσκο με κέντρο στοιχείο του D και ακτίνα ρητό αριθμό που να περιέχεται σε κάποιο G_i $i \in I$. Το πλήθος των δίσκων αυτών είναι αριθμήσιμο. Πράγμα που σημαίνει ότι με τον τρόπο αυτό βρίσκω μια αριθμήσιμη υποκάλυψη της αρχικής δηλαδή $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{i_n}$.
Απομένει να δείξουμε ότι η αριθμήσιμη αυτή κάλυψη έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν αληθεύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_N = (\cup_{n=1}^{N} G_{i_n})^c$. Τότε κάθε ένα από τα σύνολα αυτά είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοιχτού συνόλου (βλ. Θεώρημα 2.2.3). Επιπλέον, $F_N \cap K \neq \emptyset$ και αυτό γιατί υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη (αν $F_N \cap K = \emptyset$, τότε $K \subseteq F_N^c = \cup_{n=1}^{N} G_{i_n}$).
Με βάση τα παραπάνω, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_N \in F_N \cap K$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$. Πρόκειται για ακολουθία στοιχείων του K και επειδή υποθέσαμε ότι αυτό είναι ακολουθιακά συμπαγές, η $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $\{x_{N_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ η υπακολουθία αυτή και έστω x το όριό της. Τότε επειδή η $\{x_{N_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του F_{N_1} (παρατηρείστε ότι $F_N \subseteq F_M,\quad N \geq M$ και F_{N_1} κλειστό) $x \in F_{N_1}$. Τώρα αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\{x_{N_k} :\ k = 2, 3, \ldots\}$ επαναλαμβάνοντας το παραπάνω σκεπτικό καταλήγουμε

ότι $x \in F_{N_2}$. Γενικά για $\sigma \in \mathbb{N}$, η $\{x_{N_k} : \ k = \sigma, \sigma+1, \dots\}$ είναι υπακολουθία της $\{x_{N_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ και άρα συγκλίνει στο x. Το γεγονός αυτό μας δίνει άμεσα ότι $x \in F_{N_\sigma}$.

Δηλαδή αποδείξαμε ότι $x \in (\bigcap_{\sigma=1}^{\infty} F_{N_\sigma} \cap K)$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\bigcap_{\sigma=1}^{\infty} F_{N_\sigma} = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$, οπότε $x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \cap K$ πράγμα άτοπο διότι τότε το K δεν θα ήταν υποσύνολο του $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{i_n}$.

Θεώρημα 2.4.4. *Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές*

Απόδειξη. Έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του K. Επειδή το K είναι φραγμένο, αυτή είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και από το Θεώρημα 1.0.2 προκύπτει ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο $\mathbb{R}$. Επειδή το K είναι και κλειστό έπεται ότι το όριο της υπακολουθίας ανήκει στο K. Οπότε αποδείξαμε ότι το K είναι ακολουθιακά συμπαγές. Με βάση το Θεώρημα 2.4.3 έχουμε το ζητούμενο.
Παρατήρηση: Η παραπάνω πρόταση ισχύει στους $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, αλλά δεν ισχύει σε γενικότερους μετρικούς χώρους χώρους.

Παράδειγμα:
$(\mathbb{R}, d_\delta)$ όλα φραγμένα, όλα κλειστά κανένα συμπαγές

Πρόταση 2.4.3. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές. Έστω, επιπλέον, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στοιχείων του K. Από το Θεώρημα 2.4.3, το K είναι ακολουθιακά συμπαγές πράγμα που σημαίνει ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K. Από την Πρόταση 2.3.2 προκύπτει ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και το όριό της είναι μέσα στο K. Άρα (K,d) πλήρες.

2.5 Συνεκτικότητα

Ορισμός 2.5.1. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Το Y λέγεται μη συνεκτικό αν υπάρχουν ανοικτά σύνολα A, B τέτοια ώστε:*
α) $Y \subseteq A \cup B$
β) $Y \cap A \neq \emptyset$, $Y \cap B \neq \emptyset$
γ) $A \cap B = \emptyset$
Διαφορετικά το Y λέγεται συνεκτικό.

Παραδείγματα:
1)$(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $Y = (0,1) \cup (2,3)$ μη συνεκτικό στο $\mathbb{R}$.
$Y = (0,1) \cup \{2\}$ μη συνεκτικό στο $\mathbb{R}$.
2)$(\mathbb{R}^2, d_{\varepsilon\upsilon\kappa\lambda})$, $Y = B(0,1) \setminus \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ ε·ιναι συνεκτικό στο $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 2.5.1. *Το διάστημα $[a,b]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $I = [a,b]$. Έστω ότι το I δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν A, B ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε:
α) $I \subseteq A \cup B$
β) $A \cap I \neq \emptyset$, $B \cap I \neq \emptyset$
γ) $A \cap B = \emptyset$.
Εύκολα βλέπει κανείς ότι $I \setminus B = A \cap I$. Επειδή $I \setminus B = I \cap B^c$,το σύνολο αυτό είναι κλειστό και άρα το $A \cap I$ είναι κλειστό. Τότε το
$\sup(A \cap I) = t \in A \cap I$. Θα δείξουμε ότι $t = b$:
Το $A \cap I \subseteq I \Rightarrow \sup(A \cap I) \leq \sup I \Rightarrow t \leq b$.
Εστω $t < b$. Τότε $(t, b] \subseteq B \cap I$ και επειδή $B \cap I$ είναι κλειστό ($B \cap I = A^c \cap I$), το $t \in B \cap I \Rightarrow t \in A \cap B$. Άτοπο.
Άρα $t = b$.
Δείξαμε ότι $\sup(A \cap I) = b \Rightarrow b \in A \cap I$.
Όμοια δείχνουμε ότι $\sup(B \cap I) = b \Rightarrow b \in B \cap I$. Άρα $b \in A \cap B \cap I$. Άτοπο.
Οπότε το I είναι συνεκτικό.
Παρατήρηση:
Με αναλογα επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό

Θεώρημα 2.5.2. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ειναι συνεκτικό αν κια μόνο αν είναι διαστημα.*

Απόδειξη. Από το παραπάνω θεώρημα κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$, είναι συνεκτικό υποσυνολό του. Για να αποδείξουμε ότι αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό τότε είναι διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε την άρνηση της πρότασης:
Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι διάστημα. Τότε υπάρχουν $a, b \in K$ και $t \in \mathbb{R} \setminus K$ ώστε $a < t < b$. Θεωρούμε τα σύνολα $A = (-\infty, t)$ και $B = (t, \infty)$. Παρατηρούμε ότι:
α) $K \subseteq A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{t\}$
β) $a \in A \cap K$ και $b \in B \cap K \Rightarrow A \cap K \neq \emptyset$ και $B \cap K \neq \emptyset$
γ) $A \cap B = \emptyset$
Άρα το K όχι συνεκτικό.

3 Συνεχείς Συναρτήσεις

3.1 Ορισμός συνέχειας

Ορισμός 3.1.1. *Μια συνάρτηση $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ (από έναν μετρικό χώρο σε έναν άλλο) ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*
Μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παραδείγματα:
1. Συνεχής συνάρτηση $T : (C([0,1]), d_\infty) \to \mathbb{R}, \quad T(f) = f(0) + f(1)$.
2. Μη συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, d_\delta)$, $\quad f(x) = x$.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Η f είναι συνεχής στο X.
(ii) Αντίστροφη εικόνα ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$ (ii) Έστω $A \subseteq Y$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του (X,d). Αν το $f^{-1}(A)$ είναι κενό τότε είναι ανοιχτό οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε τελειώσει. Αν $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, σταθεροποιώ $x_0 \in f^{-1}(A)$. Τότε $f(x_0) \in A$ και επειδή υποθέσαμε ότι το A είναι ανοιχτό υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(f(x_0), r) \subseteq A$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < r$. Μα τότε $B(x_0, \delta) \in f^{-1}(A)$ και έχω το ζητούμενο.
(ii)$\Rightarrow$ (i) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το $x_0 \in X$, το $f(x_0) \in Y$. Θέτουμε $V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ και $U = f^{-1}(V)$. Από υπόθεση το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $x_0 \in U$. Συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_X(x_0, \delta) \subseteq U$ και άρα $f(B_X(x_0,\delta) \subseteq f(U) \subseteq V = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Δηλαδή για το τυχαίο $\varepsilon > 0$, βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
$(x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in f(B_X(x_0,\delta) \subseteq B_Y(f(x_0),\varepsilon))$. Άρα f συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in X$ κι άρα f συνεχής στο X.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Η f είναι συνεχής στο X.
(ii) Αν μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X είναι συγκλίνουσα τότε η ακολουθία $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του Y και μάλιστα $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Απόδειξη. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ με $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Επειδή η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0, για το $\delta > 0$ που βρήκαμε, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε:

$$d(x_n, x_0) < \delta, \quad n \geq n_0.$$

Συνεπώς

$$\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $x_0 \in X$ και έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$, ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$.
Για $\delta = 1$, υπάρχει $x_1 \in X$ με $d(x_1, x_0) < 1$ και $\rho(f(x_1), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$.
Για $\delta = \dfrac{1}{2}$, υπάρχει $x_2 \in X$ με $d(x_2, x_0) < \dfrac{1}{2}$ και $\rho(f(x_2), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$.
$\vdots$
Για $\delta = \dfrac{1}{n}$, υπάρχει $x_n \in X$ με $d(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$ και $\rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$.
$\vdots$
Συνεχίζοντας κατά αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο x_0, αλλά η $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει στο $f(x_0)$. Άτοπο.

3.2 Συνέχεια σε συμπαγή και συνεκτικά σύνολα

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής. Αν το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη. Έστω $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του Y με $f(K) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Επειδή η f είναι συνεχής, το σύνολο $\{f^{-1}(A_i) : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Επιπλέον $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(A_i)$, δηλαδή έχω μια ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K. Οπότε υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη δηλαδή $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} \subseteq I$ ώστε $K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(A_{i_k}) \Rightarrow f(K) \subseteq f(\bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(A_{i_k})) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(f^{-1}(A_{i_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}$. Άρα το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές. Έστω, επιπλέον, $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο, δηλ. υπάρχουν (όχι κατ' ανάγκη μοναδικά) $x_{max} \in K$ και $x_{min} \in K$*

$$f(x_{max}) = \max_{x\in K} f(x).$$

$$f(x_{min}) = \min_{x\in K} f(x).$$

Απόδειξη. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα, το $f(K)$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 2.4.1, 2.4.2 θα είναι λοιπον κλειστό και φραγμένο. Επειδή το $f(K)$ είναι φραγμένο, υπάρχει το $\sup f(K) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$ και το $\inf f(K) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$ και επειδή το $f(K)$ είναι κλειστό, θα είναι στοιχεία του. Δηλαδή υπάρχουν $x_{max}, x_{min} \in K$ ώστε

$$f(x_{max}) = \sup_{x\in K} f(x) = \max_{x\in K} f(x)$$

$$f(x_{min}) = \inf_{x\in K} f(x) = \min_{x\in K} f(x)$$

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής. Αν το $E \subseteq X$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε το $f(E)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(E)$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y. Τότε υπάρχουν U, V ανοικτά υποσύνολα του Y με τις εξής ιδιότητες:
$(i) U \cap V = \emptyset$
$(ii) f(E) \cap U \neq \emptyset$ και $f(E) \cap V \neq \emptyset$
$(iii) f(E) \subseteq U \cup V$
Θέτουμε $\tilde{U} = f^{-1}(U)$ και $\tilde{V} = f^{-1}(V)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:
α) $\tilde{U}, \tilde{V}$ ανοιχτά υποσύνολα του X ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτών υποσυνόλων του Y μέσω της συνεχής συνάρτησης f.
β) $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$, διαφορετικα θα υπήρχε $x \in \tilde{U} \cap \tilde{V} \Rightarrow x \in \tilde{U}$ και $x \in \tilde{V} \Rightarrow f(x) \in U$ και $f(x) \in V \Rightarrow f(x) \in U \cap V$, πράγμα άτοπο.
γ) $\tilde{U} \cap E \neq \emptyset$ και $\tilde{V} \cap E \neq \emptyset$, επειδή υπάρχουν $y_1 \in f(E) \cap U \neq \emptyset$ και $y_2 \in f(E) \cap V \neq \emptyset$ και άρα υπάρχουν $x_1 \in \tilde{U} \cap E$ και $x_2 \in \tilde{V} \cap E$ ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.
δ) $E \subseteq \tilde{U} \cup \tilde{V}$, το οποίο προκύπτει απο το (iii)
Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το E δεν είναι συνεκτικό. Άτοπο.

Παράδειγμα: Έστω $f : (X, d) \to (\mathbb{Z}, |\cdot|)$ συνεχής και έστω $D \subseteq X$ συνεκτικό. Τότε το $f(D)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Όμως τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ είναι τα μονοσύνολα. Άρα $f(D) = \{k\}$ όπου k ακέραιος. Δηλαδή $f(x) = k$ σταθερή, $\forall x \in D$.

3.3 Ομοιόμορφη Συνέχεια

Ορισμός 3.3.1. *Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Παραδείγματα:

1)$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x}$
2)$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$

Παρατήρηση: Εξ ορισμού, κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Αντιπαράδειγμα: $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ομοιόμορφα συνεχής.Τότε:*
α)Αν $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στοιχείων του X, τότε και η $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι ακολουθία Cauchy στοιχείων του Y.
β)Αν $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες στοιχείων του X για τις οποίες ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ τότε και $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Απόδειξη. α)Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στοιχείων του X και έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$,

$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ,οπότε για το $\delta > 0$ που βρήκαμε, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \delta$ και από το οποίο συνεπάγεται ότι $\rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$. Συνεπώς για τύχαιο $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_0$, $\rho(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$.
β)Έστω $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στοιχείων του X με $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για καθέ $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Για το $\delta > 0$ αυτό, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ με $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει $d(x_n, y_n) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω (X, d) και (Y, ρ) δύο μετρικοί χώροι και $f : K \to Y$ συνεχής, όπου $K \subseteq X$ συμπαγές. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x, y \in K$ με $d(x, y) < \delta$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο K, για κάθε $x \in K$ μπορούμε να βρούμε $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in K$ με $d(x, y) < \delta_x$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$.
Τα $B_X(x, \frac{\delta_x}{2}) : x \in K$ αποτελούν μια ανοιχτή κάλυψη του K και επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σύνολα $B_X(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) : i = 1, 2, \cdots, n$ της παραπάνω οικογένειας ώστε το
$K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_X(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$.
Επιλέγουμε για $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}\} > 0$. Θεωρούμε, επιπλέον, $x, y \in K$ με $d(x.y) < \delta$. Τότε, εφόσον
$x \in K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_X(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$, υπάρχει $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ ώστε $x \in B_X(x_{i_0}, \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2})$. Έχουμε επίσης ότι
$d(x_{i_0}, y) \leq d(x_{i_0}, x) + d(x, y) \leq \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2} + \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2} = \delta_{x_{i_0}}$.
Επομένως $x, y \in B_X(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}) \overset{(*)}{\Rightarrow} \rho(f(x_{i_0}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\rho(f(x_{i_0}), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Οπότε για τυχαίο $\varepsilon > 0$, βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in K$ με $d(x, y) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_{i_0})) + \rho(f(x_{i_0}), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3.4 Lipschitz συνέχεια-Θεώρημα Σταθερού σημείου

Ορισμός 3.4.1. *Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ θα λέγεται:*

α) Lipschitz-συνεχής αν υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ $\rho(f(x), fy)) \leq c\, d(x, y)$.
Ο αριθμός c λέγεται σταθερά Lipschitz.

β) συστολή αν είναι Lipschitz-συνεχής με σταθερά Lipschitz $c < 1$.

Παράδειγμα: Οποιαδήποτε συνάρτηση $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με τύπο $f(x) = ax + b$,όπου $a, b \in \mathbb{R}$, είναι *Lipschitz*-συνεχής με σταθερά *Lipschitz* το a.

Πρόταση 3.4.1. *Κάθϵ Lipschitz -συνϵχής συνάρτηση ϵίναι ομοιόμορφα συνϵχής*

Απόδειξη. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ *Lipschitz*−συνεχής. Δηλαδή υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) \le c\ d(x, y)$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$. Τότε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ ισχύει ότι $\rho(f(x), f(y)) \le c\ d(x, y) < c\ \delta = c\ \dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα 3.4.1. *(σταθϵρού σημϵίου Banach) Έστω (X, d) ϵνας πλήρης μϵτρικός χώρος και ϵστω $f : X \to X$ συνάρτηση συστολής στο X, δηλαδή $d(f(x), f(y)) < c\ d(x, y),\ \forall x, y \in X$, $0 < c < 1$. Τότϵ η f ϵχϵι ακριβώς ϵνα σταθϵρό σημϵίο $x_0 \in X$ (δηλαδή $f(x_0) = x_0$).*

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $x_1 \in X$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$x_1,\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \ldots .$$

Ισχυρισμός: Για κάθε $n \ge 2$ ισχύει, $d(x_{n+1}, x_n) < c^{n-1}\ d(x_2, x_1)$.
Απόδειξη ισχυρισμού:
$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) < c\ d(x_2, x_1)$, οπότε αποδείξαμε το ισχυρισμό για $n = 2$.
$d(x_4, x_3) = d(f(x_3), f(x_2)) < c\ d(x_3, x_2) = c\ d(f(x_2), f(x_1)) < c^2\ d(x_2, x_1)$,
οπότε αποδείξαμε το ισχυρισμό για $n = 3$.
Γενικά για $n \ge 2$:
$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) < cd(x_n, x_{n-1}) < c^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})$
Ισχυρισμός: Η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.
Απόδειξη ισχυρισμού:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) < \\ < c^{n-2}\ d(x_2, x_1) + c^{n-3}\ d(x_2, x_1) + \ldots + c^{m-1}\ d(x_2, x_1) = \\ = c^{m-1}\ d(x_2, x_1)(1 + c + \ldots + c^{n-m+1}) < c^{m-1}\ d(x_2, x_1)\frac{1}{1-c} \end{gathered}$$

Επειδή ο X είναι πλήρης, η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον X. Έ Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Επειδή η f είναι συνεχής, θα έχουμε $f(x_0) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0$.
Άρα το x_0 είναι σταθερό σημείο της f. Έστω ότι υπήρχε ένα δεύτερο σταθερό σημείο $y_0 \neq x_0$ της f. Τότε:
$$0 < d(y_0, x_0) = d(f(y_0), f(x_0)) \le cd(y_0, x_0) < d(y_0, x_0)\ \ (0 < c < 1)$$
$$\Rightarrow d(y_0, x_0) < d(y_0, x_0).\ \text{Άτοπο}$$

3.5 Σύνολο Σημείων Ασυνέχειας και α-Ασυνέχεια

Ορισμός 3.5.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$D_f = \{x \in X \colon \text{η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\}.$$

Παραδείγματα:

1.Συνάρτηση Dirichlet

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Επειδή τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, υπάρχει ακολουθία ρητών $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και ακολουθία αρρήτων $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$. Αν η f ήταν συνεχής στο x, θα έπρεπε $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ και $f(x) = f(\lim\limits_{n\to\infty} r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, πράγμα άτοπο.

Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

2 Τροποποιημένη συνάρτηση Dirichlet

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής μόνο στο 0. Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Υπάρχει $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ρητών και $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αρρήτων ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0, θα έπρεπε $f(x_0) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ και ταυτόχρονα $f(x_0) = f(\lim\limits_{n\to\infty} r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0 \neq 0$. Άτοπο. Άρα η f δεν είναι συνεχής στα σημεία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο 0, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας. Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\delta = \varepsilon$ έχω:

$|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ και έχω το ζητούμενο.

3. Συνάρτηση Thomae

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*, \ (m,n) = 1, \ n > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Η f δεν είναι συνεχής στους ρητούς. Πράγματι, έστω $r \in \mathbb{Q}$. Τότε το $f(r) > 0$. Υπάρχει ακολουθία αρρήτων $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$. Αν η f ήταν συνεχής στο r, θα έπρεπε $f(r) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Άτοπο.

Έστω τώρα $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο a. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ (με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και για τους αρνητικούς άρρητους). Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγω ρητό αριθμό $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$. Έστω $\varepsilon_0 = \dfrac{m_0}{n_0}$. Θεωρούμε το ανοιχτό διάστημα $([a], [a] + 1)$.

Ισχυρισμός: Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Στο διάστημα $([a], [a]+1)$ περιέχονται πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσμα με παρονομαστή το n.

Απόδειξη ισχυρισμού: Θεωρώ το σύνολο $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \ldots\}$. Δεν γίνεται άπειροι από αυτούς να περιέχονται στο διάστημα $([a], [a]+1)$, διότι αυτό είναι φραγμένο. Άρα μόνο πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσμα με παρονομαστή το n μπορεί να περιέχονται στο φραγμένο διάστημα.

Με βάση τον παραπάνω ισχυρισμό, υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί αριθμοί που μπορούν τα γραφούν ως κλάσμα με παρονομαστή κάποιον από τους $1, 2, 3, \ldots, n_0$ στο διάστημα $([a], [a]+1)$. Επιλέγω $\delta > 0$ τόσο μικρό ώστε στο διάστημα $(a-\delta, a+\delta)$ να μην υπάρχει κανένας τέτοιος ρητός αριθμός. Τότε για $|x-a| < \delta$ έχω: ή x άρρητος και έτσι $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, ή x ρητός, αλλά γράφεται ως ανάγωγο κλάσμα με παρονομαστή n_x μεγαλύτερο του n_0 και έτσι $|f(x) - f(a)| = |\frac{1}{n_x} - 0| < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon$. Άρα $D_f = \mathbb{Q}$.

Ερώτηση: Που χρησιμοποιήσαμε ότι το a είναι θετικός στην παραπάνω απόδειξη;

Ορισμός 3.5.2. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση και $a > 0$. Η f λέγεται a-συνεχής σε ένα $x_0 \in X$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in B(x_0, \delta)$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$. Η f είναι a-συνεχής αν είναι a-συνεχής σε κάθε $x \in X$.*

Λήμμα 3.5.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής σε ένα $x_0 \in X$, τότε η f είναι a-συνεχής στο x_0 για κάθε $a > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $a > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, για $\varepsilon = \frac{a}{2}$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in B_X(x_0, \delta)$:

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \frac{a}{2}$$

$$\rho(f(x_0), f(y)) < \frac{a}{2}$$

Οπότε $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(y)) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$.

Ορισμός 3.5.3. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση και $a > 0$. Ορίζουμε*

$$D_a = \{x \in X \colon \text{η } f \text{ δεν είναι } a\text{-συνεχής στο } x\}.$$

Παρατήρηση Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό, το λήμμα 3.5.1 λέει ότι $D_f^c \subseteq \bigcap_{a>0} D_a^c$. Δηλαδή $\bigcup_{a>0} D_a \subseteq D_f$.

Λήμμα 3.5.2. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση. Αν $x_0 \in D_f$, τότε υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $x_0 \in D_a$ (δηλαδή $D_f \subseteq \bigcup_{a>0} D_a$).*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in D_f$. Τότε υπάρχει ε_0 τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $x \in B_X(x_0, \delta)$ με $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Θέτωντας $a = \varepsilon_0$ έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x, x_0 \in B_X(x_0, \delta)$ με $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Άρα $x_0 \in D_a$.

Λήμμα 3.5.3. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση. Αν $a_1 < a_2$, τότε $D_{a_2} \subseteq D_{a_1}$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in D_{a_2}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $x, y \in B_X(x_0, \delta)$ με $\rho(f(x), f(y)) \geq a_2 > a_1$. Άρα $x_0 \in D_{a_1}$.

Πρόταση 3.5.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση. Τότε $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$*

Απόδειξη. Με βάση τα παραπάνω προφανώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}} \subseteq D_f$.
Έστω $x_0 \in D_f$. Τότε από το λήμμα 3.5.2, υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε το $x_0 \in D_a$. Επειδή η $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ με $n \in \mathbb{N}$, να ισχύει $\frac{1}{n} < a$. Οπότε από το λήμμα 3.5.3 θα έχουμε ότι $D_a \subseteq D_{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \geq n_0 \Rightarrow x_0 \in D_{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \geq n_0 \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$. Άρα $D_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$.

Λήμμα 3.5.4. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση και $a > 0$. Τότε το D_a είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{D_a} \subseteq D_a$. Έστω $x_0 \in \overline{D_a}$. Τότε υπάρχει $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιξείων του D_a η οποία συγκλίνει στο x_0.
Υποθέτουμε ότι $x_0 \notin D_a$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο:
Αφού $x_0 \notin D_a$, η f είναι α-συνεχής στο x_0, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in B_X(x_0, \delta)$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$.
Για το $\delta > 0$ αυτό, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ με $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B_X(x_0, \delta)$. Έστω x_{n_1} ένας τέτοιος όρος ($n_1 \geq n_0$).
Για $r = \delta - d(x_{n_1}, x_0)$, έχουμε ότι $B_X(x_{n_1}, r) \subseteq B_X(x_0, \delta)$. Οπότε, επειδή για κάθε $x, y \in B_X(x_0, \delta)$ ισχύει ότι $\rho(f(x), f(y)) < a$, θα ισχύει και για κάθε $x, y \in B_X(x_{n_1}, r)$. Δηλαδή $x_{n_1} \notin D_a$. Άτοπο
Άρα $x_0 \in D_a \Rightarrow \overline{D_a} \subseteq D_a \Rightarrow \overline{D_a} = D_a \Rightarrow$ το D_a είναι κλειστό.

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνάρτηση. Τότε το D_f είναι σύνολο F_σ.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.5.1 έχουμε ότι $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ και με βάση το λήμμα 3.5.4 το $D_{\frac{1}{n}}$ είναι κλειστό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα το D_f είναι F_σ.

Παρατήρηση:
Δε υπάρχει συνάρτηση $f : (\mathbb{R}, d) \to (Y, \rho)$ που να έχει $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ επειδή τότε το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ θα ήταν F_σ και άρα το $\mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ πράγμα που, σύμφωνα με το πόρισμα 2.3.2, δε γίνεται.

Ορισμός 3.5.4. *Μια συνάρτηση $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ ονομάζεται ομοιόμορφα a-συνεχής για κάποιο $a > 0$, αν υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$.*

Πρόταση 3.5.2. *Έστω (X,d) και (Y,ρ) δύο μετρικοί χώροι και $f : K \to Y$ a-συνεχής, όπου $K \subseteq X$ συμπαγές. Τότε η f είναι ομοιόμορφα a-συνεχής στο K.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για οποιαδήποτε δύο σημεία $x, y \in K$ με $d(x,y) < \delta$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$.
Αφού η f είναι a-συνεχής στο K, για κάθε $z \in K$ μπορούμε να βρούμε $\delta_z > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in B_X(z, \delta_z)$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$ $(*)$.
Τα $B_X(z, \dfrac{\delta_z}{2}) : z \in K$ αποτελούν μια ανοιχτή κάλυψη του K και επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σύνολα $B_X(z_i, \dfrac{\delta_{z_i}}{2}) : i = 1, 2, \cdots, n$ της παραπάνω οικογένειας ώστε το
$K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_X(z_i, \frac{\delta_{z_i}}{2})$.
Επιλέγουμε για $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta_{z_1}, \cdots, \delta_{z_n}\} > 0$. Θεωρούμε, επιπλέον, $x, y \in K$ με $d(x.y) < \delta$.
Τότε, εφόσον
$x \in K \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_X(z_i, \frac{\delta_{z_i}}{2})$, υπάρχει $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ ώστε $x \in B_X(z_{i_0}, \dfrac{\delta_{z_{i_0}}}{2})$. Έχουμε επίσης ότι
$d(z_{i_0}, y) \leq d(z_{i_0}, x) + d(x,y) \leq \dfrac{\delta_{z_{i_0}}}{2} + \delta \leq \dfrac{\delta_{z_{i_0}}}{2} + \dfrac{\delta_{z_{i_0}}}{2} = \delta_{z_{i_0}}$.
Επομένως $x, y \in B_X(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}) \overset{(*)}{\Rightarrow} \rho(f(x), f(y)) < a$.
Οπότε, βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in K$ με $d(x,y) < \delta$, να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < a$.

3.6 Ολοκλήρωση και συνέχεια, θεώρημα Lebesque

Ορισμός 3.6.1. *Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει μέτρο 0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών διαστημάτων O_n, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε:*

1) $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ και

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |O_n| \leq \varepsilon$, όπου $|O_n|$ είναι το μήκος του O_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα
1) Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι σύνολο μέτρου 0.
2) Το $\mathbb{N}$ είναι σύνολο μέτρου 0.

Πρόταση 3.6.1. *Έστω $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ μέτρου 0. Τότε το $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι σύνολο μέτρου 0.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$.
Το A_1 είναι σύνολο μέτρου 0, άρα υπάρχει ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων $\{O_{1_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:
$i)$ $A_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{1_n}$ και $ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |O_{1_n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Το A_2 είναι σύνολο μέτρου 0, άρα υπάρχει ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων $\{O_{2_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:
$i)$ $A_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{2_n}$ και $ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |O_{2_n}| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
$\vdots$
Το A_σ είναι σύνολο μέτρου 0, άρα υπάρχει ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων $\{O_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:
$i)$ $A_\sigma \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\sigma_n}$ και $ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |O_{\sigma_n}| \leq \frac{\varepsilon}{2^\sigma}$.
$\vdots$
Συνεχίζοντας κατ'αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε μια ακολουθία ανοιχτών διαστήματων $\{O_{\sigma_n}\}_{\sigma,n\in\mathbb{N}} = \{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:
$$i) A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{\sigma=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\sigma_n}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n \quad \text{και}$$
$$ii) \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |O_{\sigma_n}| \leq \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^\sigma} = \varepsilon.$$
Άρα το A είναι σύνολο μέτρου 0.

Θεώρημα 3.6.1. ***(Lebesgue)*** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το D_f είναι σύνολο μέτρου 0.*

Απόδειξη.
Αντίστροφο : Έστω ότι το D_f είναι σύνολο μέτρου 0. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη, θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann. Σταθεροποιούμε, λοιπόν, ένα $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε $a' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$. Τότε το σύνολο $D_{a'}$ είναι κλειστό (βλ. λήμμα 3.5.4) και φραγμένο ως υποσύνολο του φραγμένου συνόλου $[a,b]$. Δηλαδή το $D_{a'}$ είναι συμπαγές.
Από την άλλη μεριά, επειδή το D_f είναι μέτρου 0, υπάρχει ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:
$i)$ $D_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ και
$ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} |O_n| < \frac{\varepsilon}{4M}$, όπου $M = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0$.
Με βάση την παρατήρηση του λήμματος 3.5.1, το $D_{a'} \subseteq \bigcup_{a>0} D_a \subseteq D_f \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Οπότε, η οικογένεια $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί μια ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου $D_{a'}$. Άρα το

$D_{a'}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_n}$: $D'_a \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$. Τα $O_{i_k} : k = 1, ..., n$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη ξένα μεταξύ τους. Στην περίπτωση που κάποια από αυτά τέμνονται, η ένωση τους θα είναι ανοιχτό διάστημα. Οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} = \bigcup_{p=1}^{N} G_p$, όπου G_p είναι ανοιχτά διαστήματα και $G_i \cap G_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Τότε:

$i)$ $D_{a'} \subseteq \bigcup_{p=1}^{N} G_p$

$ii)$ $\sum_{p=1}^{N} |G_p| \leq \sum_{k=1}^{n} |O_{i_n}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |O_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Θέτουμε $K = [a, b] \setminus \bigcup_{p=1}^{N} G_p = [a, b] \cap \left(\bigcup_{p=1}^{N} G_p \right)^c$. Το K είναι κλειστό ως τομή κλειστών και φραγμένο επειδή $K \subseteq [a, b]$. Άρα το K είναι συμπαγές. Το K προκύπτει με το να αφαιρέσουμαι από το $[a, b]$ ανοιχτά και ξένα μεταξύ τους διαστήματα. Οπότε θα είναι ένωση κλειστών και ξένων μεταξύ τους διαστημάτων $F_1, F_2, ...F_\rho$. Δηλαδή, $K = \bigcup_{i=1}^{\rho} F_i$, όπου $F_i = [a_i, b_i]$ και $|F_i| = |a_i - b_i|$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητος, υποθέτουμε ότι $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2, \ldots, \leq a_\rho, \leq b_\rho, \leq b$.
Έχουμε ότι:

$$K \subseteq \left(\bigcup_{p=1}^{N} G_p \right)^c \Rightarrow K \cap \left(\bigcup_{p=1}^{N} G_p \right) = \emptyset \quad \text{και} \quad D_{a'} \subseteq \bigcup_{p=1}^{N} G_p \Rightarrow K \cap D_{a'} = \emptyset.$$

Άρα για κάθε $x \in K$, ισχύει ότι η f είναι a'-συνεχής και επειδή το K είναι συμπαγές, από πρόταση 3.5.2, η f θα είναι ομοιόμορφα a'-συνεχής στο K. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in K$ με $|x - y| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(y)| < a'$.

<u>$1^{\underline{\eta}}$ περίπτωση: $\delta > |F_i|, \forall i \in \{1, 2, ..., \rho\}$</u>

Τότε $\forall x, y \in [a_i, b_i] \Rightarrow |x - y| \leq |a_i - b_i| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < a'$.
Επομένως αν συμβολίσουμε:
$M_{[a_i,b_i]} = \sup_{x \in [a_i,b_i]} f(x)$ και $m_{[a_i,b_i]} = \inf_{x \in [a_i,b_i]} f(x)$, προφανώς $M_{[a_i,b_i]} - m_{[a_i,b_i]} \leq a'$ $(*)$.

Επίσης $\forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq M + M = 2M$ $(**)$.
(Έχουμε συμβολίσει με M το φράγμα της $|f|$ στο διάστημα $[a, b]$).
Κατασκευάζουμε τη διαμέριση
$P_\varepsilon = \{x_0 = a, x_1 = a_1, x_2 = b_1, x_3 = a_2, ..., x_{2\rho-1} = a_\rho, x_{2\rho} = b_\rho, x_{2\rho+1} = b\}$.
Στην περίπτωση που $a = a_1$ ή $b = b_\rho$ δεν αλλάζει κάτι σε αυτά που ακολουθούν:

Θεωρούμε το πάνω άθροισμα Riemann: $U(f,P_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2\rho+1} M_i(x_i-x_{i-1})$, όπου $M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x)$, θεωρούμε το κάτω άθροισμα Riemann: $L(f,P_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2\rho+1} m_i(x_i-x_{i-1})$, όπου $m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x)$, και έχουμε

$$
\begin{aligned}
U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{2\rho+1}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\rho}(M_{2i}-m_{2i})(b_i-a_i)+\sum_{j=1}^{\rho+1}(M_{2j-1}-m_{2j-1})(a_j-b_{j-1})\ ,\ b_0=a,\ a_{\rho+1}=b \\
&\overset{(*)}{<} \sum_{i=1}^{\rho} a'(b_i-a_i)+\sum_{j=1}^{\rho+1} 2M(a_j-b_{j-1}) \quad \text{χρησιμοποιήσαμε την σχέση } (**). \\
&< a'(b-a)+\sum_{p=1}^{N} 2M|G_p| \qquad\qquad (\text{επειδή } \bigcup_{j=1}^{\rho+1}(b_{j-1},a_j)=\bigcup_{p=1}^{N} G_p) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon.$

<u>$2^{\underline{\eta}}$ περίπτωση: $\delta\le|F_k|$ για κάποια $k\in\{1,2,...,\rho\}$</u>

Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε λεπτότερη διαμέριση απ' ότι προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα, κάθε κλειστό διάστημα του K με μήκος μεγαλύτερο ή και ίσο του δ, το σπάμε σε μικρότερα κλειστά διαστήματα με μήκος μικρότερο του δ, ώστε να ισχύει σε κάθε ένα από αυτά η συνθήκη της ομοιόμορφης a'-συνέχειας.
Θεωρούμε, δηλαδή τη διαμέριση
$P_\varepsilon=\{a,a_1,a_1+\frac{\delta}{2},a_1+2\frac{\delta}{2},...,b_1,a_2,a_2+\frac{\delta}{2},\dots,b\}$. Τότε όπως και στην πρώτη περίπτωση, χωρίζουμε το $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)$ σε άθροισμα πάνω στα διαστήματα που περιέχουν τα σημεία του $D_{a'}$, οπότε θα είναι μικρότερο του $2M\frac{\varepsilon}{4M}=\frac{\varepsilon}{2}$, και σε άθροισμα πάνω στα διαστήματα που ισχύει η ομοιόμορφη a'-συνέχεια σε κάθε ένα από αυτά, οπότε αυτό το άθροισμα θα είναι μικρότερο του $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα και σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Δηλαδή η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη.

Ευθύ: Έστω ότι η f είναι *Riemann* ολοκληρώσιμη και έστω $\varepsilon>0$. Έστω $a'>0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $P_\varepsilon=\{a,x_1,x_2,...x_n,b\}$ του $[a,b]$, ώστε $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<a'\ \frac{\varepsilon}{2}$.

Θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα $J_0 = [a, x_1]$, $J_1 = [x_1, x_2]$,..., $J_n = [x_n, b]$ και αντίστοιχα θεωρούμε τα $M_\sigma = \max_{x \in J_\sigma} f(x)$, $m_\sigma = \min_{x \in J_\sigma} f(x)$, με $\sigma \in \{0, 1, ..., n\}$.
Έστω $A = \{\sigma \in \{0, 1, ..., n\} : J_\sigma^o \cap D_{a'} \neq \emptyset\}$. Τότε:

$$\sum_{\sigma \in A} (M_\sigma - m_\sigma)|J_\sigma| \leq \sum_{\sigma=0}^{n} (M_\sigma - m_\sigma)|J_\sigma| = U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < a' \ \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma \in A} (M_\sigma - m_\sigma)|J_\sigma| < a' \ \frac{\varepsilon}{2}. \ (1)$$

Έστω $\sigma \in A$, δηλαδή $J_\sigma^o \cap D_{a'} \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $c_\sigma \in J_\sigma^o \cap D_{a'}$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(c_\sigma - \delta, c_\sigma + \delta) \subseteq J_\sigma^o$ και για αυτό το δ, υπάρχουν $x, y \in (c_\sigma - \delta, c_\sigma + \delta)$ τέτοια ώστε:
$|f(x) - f(y)| \geq a' \Rightarrow M_\sigma - m_\sigma \geq |f(x) - f(y)| \geq a' \Rightarrow M_\sigma - m_\sigma \geq a'$. (2)
Από (1), (2) θα έχουμε ότι:

$$\sum_{\sigma \in A} a'|J_\sigma| \leq \sum_{\sigma \in A} (M_\sigma - m_\sigma)|J_\sigma| < a' \ \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sum_{\sigma \in A} |J_\sigma| < \frac{\varepsilon}{2}. \ (*)$$

$$D_{a'} \subseteq \bigcup_{\sigma \in A} J_\sigma^o \cup \{a, x_1, x_2, ..., x_n, b\} \subseteq \bigcup_{\sigma \in A} J_\sigma^o \cup (a - \frac{\varepsilon}{4(n+2)}, a + \frac{\varepsilon}{4(n+2)}) \cup$$
$$\cup (x_1 - \frac{\varepsilon}{4(n+2)}, x_1 + \frac{\varepsilon}{4(n+2)}) \cup ... \cup (b - \frac{\varepsilon}{4(n+2)}, b + \frac{\varepsilon}{4(n+2)}).$$

Άρα για τυχαίο $\varepsilon > 0$, βρήκαμε μια ακολουθία ανοιχτών διαστημάτων $I_n : n \in \mathbb{N}$ (που ουσιαστικά είναι πεπερασμένη γιατί απο ένα σημείο και μετά θεωρούμε όλα τα υπόλοιπα ανοιχτά διαστήματα να είναι $\emptyset$) για την οποία ισχύει:

$i) D_{a'} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$ii) \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{\sigma \in A} |J_\sigma| + (n+2)\frac{\varepsilon}{2(n+2)} \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Άρα το $D_{a'}$ είναι σύνολο μέτρου 0 και επειδή το a' ήταν τυχαίο, δείξαμε ότι D_a είναι μέτρου 0 για κάθε $a > 0$. Δηλαδή το $D_{\frac{1}{n}}$ είναι μέτρου 0 για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την πρόταση 3.5.1 έχουμε ότι $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ και άρα από την πρόταση 3.6.1 ,το D_f είναι σύνολο μέτρου 0 ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων μέτρου 0.