ΑΛΓΕΒΡΑ, 22/7/07

Λεντούδης

I) α) Αν η απεικόνιση $x \longmapsto x^{-1}$ είναι ομομορφισμός ομάδας G, δείξτε ότι η G είναι αβελιανή

β) Αν η απεικόνιση $x \longmapsto x^{2}$ είναι ομομορφισμός ομάδας G, δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

II) Έστω $G = \langle x \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης $n < +\infty$.

α) Δείξτε ότι $G \simeq \mathbb{Z}_n$

β) Δείξτε ότι $\langle x \rangle = \langle x^k \rangle \Leftrightarrow$ μκδ$(k,n) = 1$

γ) Δείξτε ότι $\mathrm{Aut}\, G$ είναι αβελιανή και ότι $|\mathrm{Aut}\, G| = \varphi(n)$

δ) Βρείτε τους $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z}_5$ και $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z}_8$

ε) Δείξτε ότι η $t \longrightarrow t^{-1}$ είναι αυτομορφισμός της G

στ) Εξετάστε ότι η $t \longrightarrow t^{2}$ είναι αυτομορφισμός της G

ζ) Τι γνωρίζετε για τις υποομάδες της G; (χωρίς απόδειξη)

η) Δείξτε ότι $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

III) α) Δώστε τον ορισμό της συμμετρικής ομάδας S_n και δείξτε ότι $|S_n| = n!$

β) Τι γνωρίζετε για τα σημεία $\varepsilon : S_n \longrightarrow \{+1, -1\}$ της S_n;

γ) Δείξτε ότι ο πυρήνας του ε είναι κανονική υποομάδα της S_n δείκτου 2.

δ) Δείξτε ότι αν $\varepsilon(\sigma) = +1$ (αντίστοιχα -1) κάθε ανάλυση του σ σε γινόμενο αντιμεταθέσεων περιέχει άρτιο (αντίστοιχα περιττό) πλήθος αντιμεταθ.

ε) Έστω $f \in S_n$ και $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ένας k-κύκλος της S_n. Δείξτε ότι $f(a_1, \dots, a_k) f^{-1} = (f(a_1), \dots, f(a_k))$.

IV) Έστω K πεπερασμένο σώμα χαρακτηριστικής p.

α) Δείξτε ότι p είναι ακέραιος πρώτος και ότι το K περιέχει υπόσωμα ισόμορφο με το $\mathbb{Z}_p$.

β) Δείξτε ότι το πλήθος των στοιχείων του K ισούται με p^n.

γ) Δείξτε ότι η απεικόνιση $x \xmapsto{\sigma} x^p$ είναι αυτομορφισμός του K

δ) Δείξτε ότι $\sigma|_{\mathbb{Z}_p} = id$

ε) Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα του K είναι κυκλική.

V) Έστω K αντιμεταθετικό σώμα, $a \in K$, $f(x) \in K[x]$.

α) Δείξτε ότι $a = 0 \Leftrightarrow x - a \mid f(x)$

β) Έστω $1 \leq$ βαθμός $f \leq 3$. Δείξτε ότι f ανάγωγο επί K $\Leftrightarrow$ f δεν έχει ρίζα εντός K.

γ) Δείξτε ότι η πιο πάνω ισοδυναμία δεν ισχύει για βαθμό $f > 3$.

δ) Δείξτε ότι a πολλαπλή ρίζα του f $\Leftrightarrow$ a ρίζα του $f \cdot f'$

ε) $(K = \mathbb{R})$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) \mid f(x)$

στ) Δείξτε ότι $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}[x]$.

ζ) Δείξτε ότι τα ανάγωγα στοιχεία του $\mathbb{R}[x]$ είναι τα πρωτοβάθμια όπως και τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα.