

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1. Αν $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$ να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-2)$, $f(1)$ και $f(-1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Αν $g(t) = (t - 8)(t + 2)$ να υπολογίσετε τις τιμές $g(10)$, $g(-5)$.
Για ποιες τιμές του t είναι $g(t) = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ 3. Αν $h(\theta) = \sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$, $h(\frac{\pi}{4})$.
Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι $h(\theta) = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ 4. Αν $\sigma(x) = \ln x^4$, να υπολογίσετε τις τιμές $\sigma(-1)$, $\sigma(\frac{1}{e})$.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

α : $f(x) = 17x^5 - 3x^4 - x^3 + 54x^2 - 987$

β : $f(x) = \frac{3x}{5-x}$

γ : $f(x) = \frac{100}{(x-1)(9-x)}$

δ : $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-4}$

ϵ : $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}$

ΑΣΚΗΣΗ 6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

α : $f(x) = \sqrt{2-5x}$

β : $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$

γ : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\delta: f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 1}$$

$$\epsilon: f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\alpha: f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 15}}$$

$$\beta: f(x) = \frac{3x}{\sqrt{5 - x}}$$

$$\gamma: f(x) = \frac{x + 6}{\sqrt{(x - 1)(x - 2)}}$$

$$\delta: f(x) = \frac{5x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\epsilon: f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$$

$$\sigma\tau: g(t) = \frac{5 - t^2}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\alpha: f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \frac{2}{5x - 5}$$

$$\beta: f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - x - 6} + \sqrt{9 - x^2}$$

$$\gamma: g(x) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{10 - x}$$

$$\delta: h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$

$$\epsilon: \varphi(x) = \sqrt{3 - 4x + x^2} + \sqrt{x^2 + 6x + 8}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\alpha: f(x) = \frac{x}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

$$\beta: s(x) = \frac{x^5 - x^4 + 3x - 2}{x^3 - 3x^2 + x + 2}$$

$$\gamma: f(x) = \frac{1}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x$ και $g(x) = 9 - x^2$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις (τύπος και π.ο.)

$$1) f(x) + g(x) \quad 2) g(x) - f(x) \quad 3) f(x)g(x) \quad 4) \frac{f(x)}{g(x)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 5$ και $g(x) = \sqrt{x} + 5$.
Να βρεθούν οι συναρτήσεις (τύπος και π.ο.)

$$1) f(x) + g(x) \quad 2) g(x) - f(x) \quad 3) f(x)g(x) \quad 4) \frac{f(x)}{g(x)} \quad 5) \frac{g(x)}{f(x)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f
με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, όπου $g(x) = -2x + 1$.

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το π.ο. της f .

ΑΣΚΗΣΗ 13. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f
με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, όπου $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

ΑΣΚΗΣΗ 14. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής
παράστασης C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, όπου $f(x) = -x^2 - 3x - 5$.

ΑΣΚΗΣΗ 15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 3}$ και $g(x) = \frac{3(x - a)}{3 - x}$,
όπου $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(-2) = g(-2).$$

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g και να αποδειχθεί ότι $a = -1$.

ΑΣΚΗΣΗ 16. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 2a + x^3$ και $g(x) = x^2 + a$, όπου
 $a \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(3) + g(3) = 24.$$

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g και να αποδειχθεί ότι $a = -4$.

ΑΣΚΗΣΗ 17. Έστω $f(x) = x^2 + ax + a - 6$ με $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $K(2, -8)$.

(1) Να αποδείξετε ότι $a = -2$.

(2) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(3) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f, C_g , όπου $g(x) = 2x - 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 18. Έστω $f(x) = ax^2 + x - 1$ και $g(x) = 2x + 1$.

α : Βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(1) = g(1)$.

β : Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνονται οι C_f και C_g .

ΑΣΚΗΣΗ 19. Έστω $f(x) = x^2 + (\mu + 1)x + 4$. Για ποιά τιμή του πραγματικού αριθμού μ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 7)$;

ΑΣΚΗΣΗ 20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + bx - 3$ και $g(x) = 2\sqrt{2x^2 + 2}$.

Αν ισχύουν :

α : $f(1) = g(1)$

β : το σημείο $A(-2, -5)$ ανήκει στη C_f

να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 21. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{ax - 5}{\sqrt{x} - 1}$, $a \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(4, 7)$.

α : Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

β : Βρείτε το a .

γ : Βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΑΣΚΗΣΗ 22. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{a-x}{\sqrt{x-2}}$, $a \in \mathbb{R}$.

α : Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

β : Βρείτε την τιμή του a , ώστε το σημείο $B(4, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

ΑΣΚΗΣΗ 23. Θεωρούμε τη δίκλαδη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , x < 1 \\ 6 - 3x & , x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν :

α : το πεδίο ορισμού της f .

β : οι τιμές $f(0), f(1), f(-1), f(-2), f(4)$.

γ : οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 24. Θεωρούμε τη δίκλαδη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+1}{x-1} & , x \neq 1 \\ \lambda^2 - 3 & , x = 1 \end{cases}$$

Να βρεθούν :

α : το πεδίο ορισμού της f .

β : το λ ώστε $f(1) = f(-1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 25. Να υπολογισθούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu x$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sigma \upsilon \nu x$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 2} \left(x^3 + 4x^2 - 3x + \frac{1}{2} \right)$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2\sigma \upsilon \nu x - \sqrt{3}\eta \mu x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 26. Να υπολογισθούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon \phi x$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \pi} (\sqrt{x} - 2x - \sqrt{\pi}) \sigma \upsilon \nu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 27. Να υπολογισθούν τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{4x^2 - 12x}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28. Να βρεθούν τα όρια:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{x+3}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 29. Να βρεθούν τα όρια:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x + \sqrt{x^2 + 8}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x^2 - 2x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 30. Να βρεθούν τα όρια:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 31. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Αν οι τιμές $f(1)$ και $f(-2)$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

να βρεθούν τα:

$$\alpha) f(1), f(-2)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 33. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Αν οι τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$ και $f(2)$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$$

να βρεθούν τα:

$$\alpha) f(0), f(\sqrt{2}), f(2)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 34. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x^2 - 4) f(x) = x^3 (x - 2) + 3(x - 2)$$

Να βρείτε το:

α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β) $f(2)$

ΑΣΚΗΣΗ 35. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$xf(x) = 2f(x) + x^2 - 4$$

Να βρείτε το:

α) τύπο της $f(x)$ για $x \neq 2$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

γ) $f(2)$

ΑΣΚΗΣΗ 36. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει

$$x^2 f(x) = 9f(x) + \sqrt{x+1} - 2x + 4$$

Να βρείτε το:

α) τύπο της $f(x)$ για $x \neq 3$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

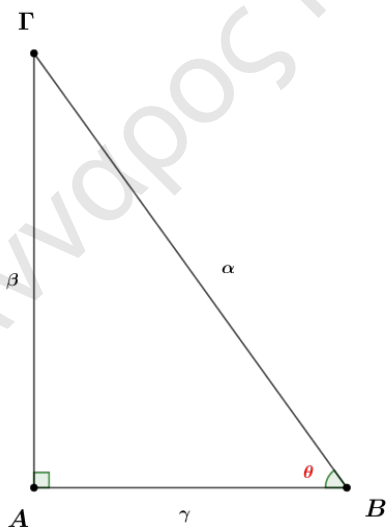
$$\gamma) f(3)$$

ΑΣΚΗΣΗ 37. Στο σχήμα 1 έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $\gamma=1$.

α: Να βρείτε συναρτήσει της γωνίας θ τις πλευρές a και β .

β: Υπολογίστε με δύο τρόπους το $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$.

γ: Υπολογίστε με δύο τρόπους το $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$



ΣΧΗΜΑ 1

ΑΣΚΗΣΗ 38. Με σύρμα μήκους x κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου ως συνάρτηση του x .

ΑΣΚΗΣΗ 39. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 , όταν:

α : $f(x) = x^2 + 1$ και $x_0 = 3$.

β : $f(x) = x^2 - 3x$ και $x_0 = -1$.

γ : $f(x) = \frac{1}{x}$ και $x_0 = 1$

δ : $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $x_0 = 3$

ΑΣΚΗΣΗ 40. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$, όταν:

α : $f(x) = \sqrt{x}$ και $(4, f(4))$.

β : $f(x) = x^2 + 5$ και $(-2, f(-2))$

Γιάνναρος Μιχάλης

ΑΣΚΗΣΗ 41. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = 1 \quad 2) f(x) = -\frac{5}{8} \quad 3) f(x) = \sqrt{13} \quad 4) f(x) = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 42. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x \quad 2) f(x) = x^5 \quad 3) f(x) = x^{11}$$

ΑΣΚΗΣΗ 43. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x^{-1} \quad 2) f(x) = x^{-5} \quad 3) f(x) = x^{-11}, x \neq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 44. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad 2) f(x) = \frac{1}{x} \quad 3) f(x) = \frac{1}{x^3} \quad 4) f(x) = \frac{1}{x^{-8}}, x \neq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 45. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad 2) f(x) = x^{\frac{5}{2}} \quad 3) f(x) = x^{\frac{1}{4}}, x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 46. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x^{-\frac{2}{3}} \quad 2) f(x) = x^{-\frac{5}{2}} \quad 3) f(x) = x^{-\frac{1}{4}}, x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 47. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \sqrt{x} \quad 2) f(x) = \sqrt[3]{x^4} \quad 3) f(x) = \sqrt[10]{x^3}, x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 48. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 2) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}, \quad x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 49. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = 3x^4 \quad 2) f(x) = -5x \quad 3) f(x) = \frac{12}{7}x^7$$

ΑΣΚΗΣΗ 50. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{-4}{x} \quad 2) f(x) = -2 \cdot \frac{1}{x^5} \quad 3) f(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 51. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = 2\eta\mu x \quad 2) f(x) = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x \quad 3) f(x) = 5\sigma\upsilon\nu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 52. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = 5x^2\sqrt{x} \quad 2) f(x) = -3 \cdot \frac{x^3}{x^{-5}} \quad 3) f(x) = 9x^2x^5$$

ΑΣΚΗΣΗ 53. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x - 5x^2 \quad 2) f(x) = 6 - 2x^3 - \frac{2}{x^4} \quad 3) f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 54. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = 5x^2 - 3\sigma\upsilon\nu x \quad 2) f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 55. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \quad 2) f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{5}\eta\mu x + \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 56. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x^2\eta\mu x \quad 2) f(x) = x\sigma\upsilon\nu x \quad 3) f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 57. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = (x^2 - 2x)(x + 6) \quad 2) f(x) = (x + x^2)\sigma\upsilon\nu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 58. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \quad 2) f(x) = (x + \sigma\upsilon\nu x)(x - 2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 59. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \quad 2) f(x) = 3(x + 1)(x^3 + x) + 5x\eta\mu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 60. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \varepsilon\varphi x \quad 2) f(x) = \sigma\varphi x$$

ΑΣΚΗΣΗ 61. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad 2) f(x) = \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x} \quad 3) f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 62. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{2x-1}{3x+1} \quad 2) f(x) = \frac{2}{1+x^2} \quad 3) f(x) = \frac{x}{x^2+2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 63. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} \quad 2) f(x) = \frac{2\eta\mu x - 3x^2}{\eta\mu x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 64. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = (12x^3 - 4x) \left(\sqrt[3]{x^2} + 5x \right) \quad 2) f(x) = \frac{3\sqrt{x} + x^2}{2 + 4\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 65. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \quad 2) f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sigma\upsilon\nu x} \quad 3) f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 66. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = x^3 \varepsilon\varphi x \quad 2) f(x) = \eta\mu x \varepsilon\varphi x$$

ΑΣΚΗΣΗ 67. Να βρείτε τα όρια με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου σε σημείο:

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi + h)}{h} \quad 2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi + h) + 1}{h}$$

ΑΣΚΗΣΗ 68. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + ax + 2019.$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , αν είναι γνωστό

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 69. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 2017.$$

Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 70. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = (x+3)^2 \quad 2) f(x) = (x-2)^{11}$$

ΑΣΚΗΣΗ 71. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = (2x-5)^3 \quad 2) f(x) = (4-5x)^6$$

ΑΣΚΗΣΗ 72. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = (3x^4 + 4x^3)^2 \quad 2) f(x) = (3x - x^4)^{-3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 73. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \sqrt{x+3} \quad 2) f(x) = \sqrt{4x^3 - 2x} \quad 3) f(x) = \sqrt{4-x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 74. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x+5} \quad 2) f(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 \quad 3) f(x) = \frac{1}{(3x^2+2x)^7}$$

ΑΣΚΗΣΗ 75. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \sigma\upsilon\nu 5x \quad 2) f(x) = \eta\mu(x^2+1) \quad 3) f(x) = \eta\mu(x^2+x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 76. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \sigma\upsilon\nu x^2 \quad 2) f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \quad 3) f(x) = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 77. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \eta\mu 4x \quad 2) f(x) = \eta\mu^4 x \quad 3) f(x) = \eta\mu x^4$$

ΑΣΚΗΣΗ 78. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \eta\mu((x+1)(x+2)) \quad 2) f(x) = \eta\mu(x\sigma\upsilon\nu x)$$

ΑΣΚΗΣΗ 79. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \eta\mu x^2 + \sigma\upsilon\nu x^3 \quad 2) f(x) = \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x$$

ΑΣΚΗΣΗ 80. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση όταν:

$$1) f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad 2) f(x) = \sqrt{\eta\mu x} \quad 3) f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 81. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f όταν η εφαπτομένη:

α: διέρχεται από το σημείο $(2, f(2))$.

β: διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

γ: είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x - 5$.

δ: είναι κάθετη στην ευθεία $y = x + 7$.

ε: σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ΑΣΚΗΣΗ 82. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ στο σημείο $(1, f(1))$.

ΑΣΚΗΣΗ 83. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = 4x^3 - 2x - 5$ στο σημείο $(1, f(1))$.

ΑΣΚΗΣΗ 84. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 + 2x - 3$ στο σημείο $(-2, f(-2))$.

ΑΣΚΗΣΗ 85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$.

α: Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x - 7$;

β: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$.

α: Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -2x - 1$;

β: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$.

α: Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -4x + 16$;

β: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x$.

α: Σε ποιά σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f η εφαπτομένη της είναι κάθετη με την ευθεία $y = 5x - 3$;

β: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 89. Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 6$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 90. Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$. Ποιά είναι η εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία αυτά;

ΑΣΚΗΣΗ 91. Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τη διχοτόμο της γωνίας $y\hat{O}x$.

ΑΣΚΗΣΗ 92. Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{3} \cdot x(1 - x)$ στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60° .

ΑΣΚΗΣΗ 93. Για ποιά τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + 2x - 3$ στο σημείο της $A(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 4$;

ΑΣΚΗΣΗ 94. Για ποιά τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + ax - 3$ στο σημείο της $A(-1, f(-1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2;

ΑΣΚΗΣΗ 95. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

a) $f(x) = x^2 + 3x$ β) $f(x) = -2x^2 + 1$ γ) $f(x) = x^2 - 10x + 121$

ΑΣΚΗΣΗ 96. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ β) $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - \frac{25}{6}x + 5$ γ) $f(x) = x^3 - 9x + 11$

ΑΣΚΗΣΗ 97. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x$ β) $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 4x - 6$
γ) $f(x) = x^4 - 32x$

ΑΣΚΗΣΗ 98. Να δείξετε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα:

α) $f(x) = -x^3$ β) $f(x) = x^3 + x$ γ) $f(x) = x^3 + 15x^2 + 75x - 2$

ΑΣΚΗΣΗ 99. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}.$$

α: Να βρείτε την παράγωγο της f .

β: Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f .

γ: Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2019)$ και $f(2020)$.

δ: Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

ΑΣΚΗΣΗ 100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 4x + 2019$.

(1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

(2) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^4 + 4x + 3 \geq 0$.