

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;
(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;
(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;
(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

A5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 , Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_a^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:

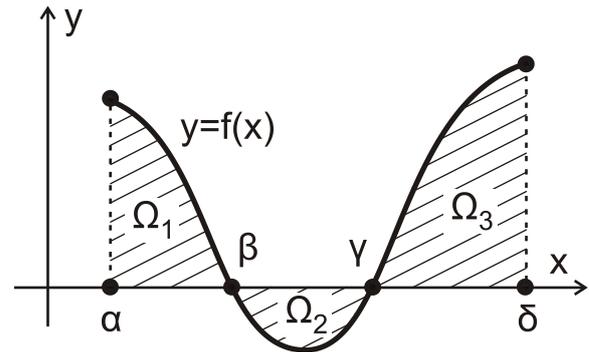
α) 6

β) -4

γ) 4

δ) 0

ε) 2



Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 3

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 5

- Δ3.** i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 3)
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$,
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Μονάδες 5)
Μονάδες 8
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.
Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Θέμα Α

- A1.** α) Σελίδα 15 σχολικού βιβλίου.
β) i) Σελίδα 35 σχολικού βιβλίου.
ii) Σελίδες 35-36 σχολικού βιβλίου.
- A2.** Σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.
- A3.** Σελίδα 135, σχολικού βιβλίου.
- A4.** α) **Λάθος.** Ένα αντιπαράδειγμα βρίσκεται στο σχόλιο της σελίδας 134 του σχολικού βιβλίου.
β) **Λάθος.** Ένα αντιπαράδειγμα βρίσκεται στη σελίδα 71 του σχολικού βιβλίου.
- A5.** Σύμφωνα με το σχόλιο της σελίδας 228 του σχολικού βιβλίου, η σωστή απάντηση είναι το (γ)

Θέμα Β

- B1.** Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 2$ στο $+\infty$, εξ ορισμού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

- B2.** Για $\lambda = 2$ έχουμε ότι $f(x) = e^{-x} + 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ ορισμένη στο διάστημα $[2, 3]$. Η g είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα και ισχύει

$$g(2) \cdot g(3) = e^{-2} \cdot (e^{-3} - 1) < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, 3)$.

Όμως $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$. Οπότε η ρίζα της $g(x) = 0$ είναι μοναδική, αφού $g \downarrow (2, 3)$.

- B3.** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , διότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Συνεπώς η f είναι 1-1.

Εύρεση αντίστροφης:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \\ &\Leftrightarrow -x = \ln(y - 2), \quad y > 2 \\ &\Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), \quad y > 2 \end{aligned}$$

Επίσης $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\ln(y-2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y > 2$. Επομένως
 $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$.

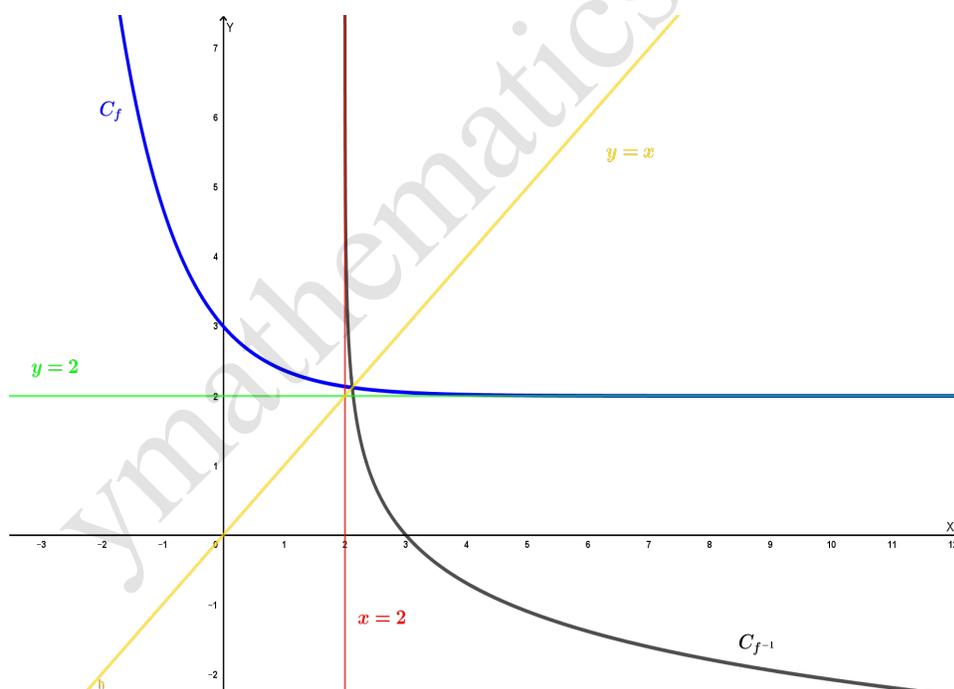
B4. Αναζητούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη στο άκρο $x_0 = 2$ του πεδίου ορισμού της f^{-1} στο οποίο δεν ορίζεται. Για τον υπολογισμό του ορίου της f^{-1} στο 2 θέτουμε

$$u = x - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} u = 0^+$$

κι έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$$

Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.



Σχήμα 1:

Θέμα Γ

Γ1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, είναι και συνεχής σε αυτό.
Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{\alpha=\beta}{\Leftrightarrow} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{DLH}{\Leftrightarrow} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + \alpha) \Leftrightarrow \\ 1 + \alpha &= 2 \Rightarrow \alpha = \beta = 1 \end{aligned}$$

Γ2. Για $\alpha = \beta = 1$ έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

Για $x > 1$ έχουμε $f'(x) = 2x > 0$.

Για $x < 1$ έχουμε $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$.

Για $x = 1$ από το (Γ1) έχουμε $f'(1) = 2 > 0$.

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ κι άρα $f \uparrow \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι και συνεχής έχουμε ότι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Γ3. i) Για $x \geq 1$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$, αδύνατη.

Για $x < 1$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x = 0$. Επειδή $f \uparrow \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$f((-\infty, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x), \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + x) \right) = (-\infty, 1)$$

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 στο διάστημα $(-\infty, 1)$. Όμως δεν εξασφαλίζουμε ότι $x_0 < 0$. Για αυτό βρίσκουμε ότι

$$f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x), \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x-1} + x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right)$$

και άρα η ρίζα x_0 είναι αρνητική.

ii) Είναι:

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ή } f(x) = x_0.$$

Η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $(x_0, +\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα. Η εξίσωση $f(x) = x_0$ είναι κι αυτή αδύνατη στο διάστημα $(x_0, +\infty)$ διότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$ και $x_0 < 0$.

Συνεπώς η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Από τα δεδομένα της εκφώνησης προκύπτει ότι $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2 \mu/sec$. Το τρίγωνο MOK είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $OK = x$ και $KM = f(x) = x^2 + 1$. Επομένως

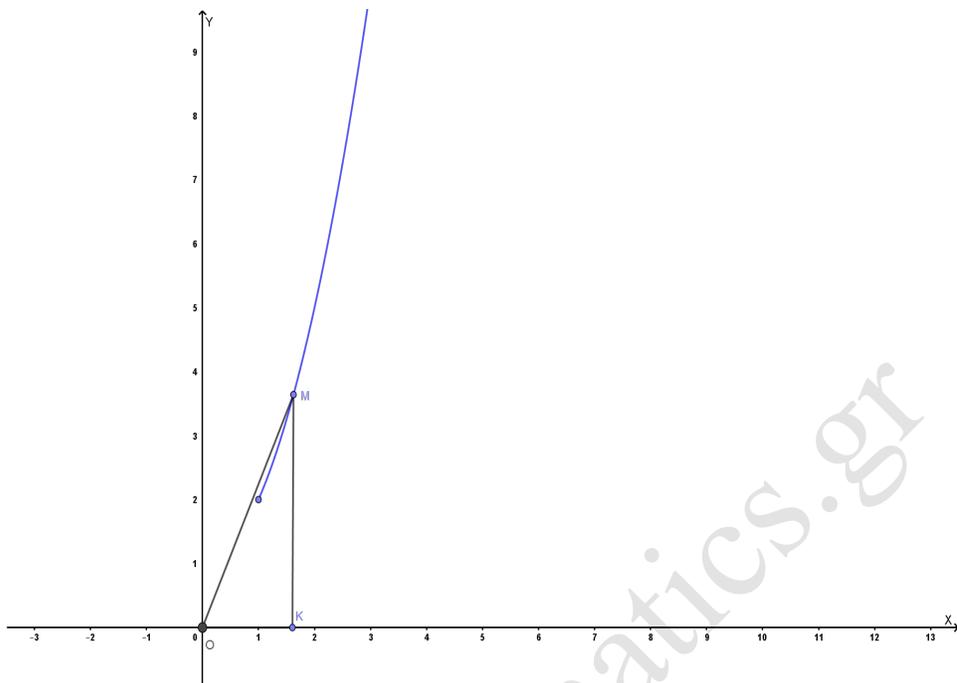
$$E = (M \overset{\Delta}{O} K) = \frac{1}{2} (x^3 + x).$$

Εισάγουμε το χρόνο t στη συνάρτηση του εμβαδού $\left(E(t) = \frac{1}{2} (x^3(t) + x(t)) \right)$ και τη παραγωγίζουμε ως προς t :

$$E'(t) = \frac{1}{2} (3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t))$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2) = 28 \tau. \mu. / sec.$$



Σχήμα 2:

Θέμα Δ

Δ1. Από υπόθεση το σημείο $A(1,1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
Άρα

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1. \quad (*)$$

Επίσης, από υπόθεση, η $(\varepsilon) y = -x + 2$ εφαπτεται της C_f στο $A(1, 1)$.
Άρα

$$f'(1) = -1.$$

Επειδή $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$, έπεται ότι

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \xrightarrow{(*)} \beta = 2.$$

Δ2. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ έχουμε

$$f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2.$$

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδό πρέπει να βρούμε τη σχετική θέση των C_f και (ε) στο διάστημα $[1, 2]$.
Για κάθε $x \in [1, 2]$ ισχύουν

$$x - 1 \geq 0$$

και

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$$

Συνεπώς για κάθε $x \in [1, 2]$

$$(x - 1) \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -x + 2.$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν E είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 (f(x) - (-x + 2)) dx = \int_1^2 (x - 1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &\stackrel{*}{=} \int_1^2 \frac{\ln u}{2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u dx \\ &= \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} dx \\ &= \frac{1}{2} 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_1^2 1 \cdot du \\ &= \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \tau.μ. \end{aligned}$$

* Θέτουμε $u = x^2 - 2x + 2$, άρα $du = 2(x - 1)dx$. Επίσης $x = 1 \Rightarrow u = 1$ και $x = 2 \Rightarrow u = 2$.

Δ3. i) Είναι $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \text{ (βλ. ερ. Δ2)} \text{ και } 2 \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

Συνεπώς $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda &\geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} &\geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + 2 \Leftrightarrow \\ f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} &\geq f(\lambda) + \lambda \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$. Από το ερ. Δ3 (i), προκύπτει ότι $h'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ισχυριζόμαστε ότι η h είναι αύξουσα¹. Πράγματι: έστω ότι η h δεν είναι αύξουσα, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, αλλά $g(x_1) > g(x_2)$. Τότε, επειδή η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} < 0,$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $h'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, άτοπο. Συνεπώς h είναι αύξουσα στο \mathbb{R} .

Οπότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{1}{2} > \lambda &\Rightarrow h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda) \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \\ &\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Δ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$ και $f'(x) \geq -1$. Επομένως

$$f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) = -1$$

Η εξίσωση $f'(x) = -1$ σύμφωνα με το ερ. Δ3 (i) έχει μοναδική ρίζα $x = 1$ και η $g'(x) = -1$ έχει μοναδική ρίζα $x = 0$. Επομένως, αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη, θα είναι μοναδική

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $(0,2)$ είναι

$$y - 2 = -(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

η οποία εφάπτεται και της C_f από υπόθεση. Άρα η $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

¹Μια συνάρτηση h λέγεται αυξουσα στο διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$.