

Μαθηματικά ΣΑΜ-ΕΜΠ
Σεπτέμβριος 2015

ΘΕΜΑ 1. Αν $\{e_1, e_2\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$, γράψτε τι μορφή ως προς τα e_1, e_2 έχουν τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$.

Λύση

Είναι: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τυχαίο διάνυσμα. Τότε

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2.$$

■

ΘΕΜΑ 2. Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $A(1, 2, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(1, 1, 1)$.

Λύση

Είναι:

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + y + z = 4$$

■

ΘΕΜΑ 3. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $\ln x + \ln y + \ln z = 0$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.

Λύση

Έστω $F(x, y, z) = \ln x + \ln y + \ln z$. Το κάθετο διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $F(x, y, z) = 0$ στο σημείο $(1, 1, 1)$ είναι το

$$\nabla F(1, 1, 1).$$

Επειδή $\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, έχουμε ότι $\nabla F(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$. Συνεπώς το ζητούμενο εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 3.$$

■

ΘΕΜΑ 4. Βρείτε τον πίνακα του μετασχηματισμού του $\mathbb{R}^3$ που προκύπτει αν πάρουμε τον συμμετρικό του ως προς το επίπεδο zOy και μετά τον στρίψουμε κατά 45° γύρω από τον άξονα των z κατά φορά αντίθετη με την κίνηση(των δεικτών) του ρολογιού.

Λύση

Θεωρούμε τη συνήθη βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$.

Έστω A ο πίνακας του μετασχηματισμού που προκύπτει αν πάρουμε τον συμμετρικό του ως προς το επίπεδο zOy και Σ ο πίνακας του μετασχηματισμού που προκύπτει όταν τον στρίψουμε κατά 45° γύρω από τον άξονα των z κατά φορά αντίθετη με την κίνηση (των δεικτών) του ρολογιού.

Τότε ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $B = \Sigma A$.

Θα βρούμε τους πίνακες A και Σ με τη βοήθεια των στοιχείων της συνήθους βάσης ως εξής:

- Εύρεση του πίνακα A :

$$- A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Εύρεση του πίνακα Σ :

$$- \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \Sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς } \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Επομένως } B = \Sigma A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

ΘΕΜΑ 5. Εξετάστε αν ο $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Ποιά είναι η διάστασή του; Μπορείτε να βρείτε μια βάση του;

Λύση

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x, y, z), (u, v, w) \in V$. Τότε ισχύει ότι

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ u + 2v + 3w = 0 \end{cases} \quad (*)$$

α: Ισχύει ότι $(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w) \in V$, διότι

$$(x + u) + 2(y + v) + 3(z + w) = (x + 2y + 3z) + (u + 2v + 3w) \stackrel{(*)}{=} 0$$

β: Ισχύει ότι $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in V$, διότι

$$\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + 2y + 3z) \stackrel{(*)}{=} 0$$

Άρα ο V είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Η διάσταση του V είναι δύο, αφού είναι ένα επίπεδο.

Μπορούμε να βρούμε μια βάση του ως εξής:

έστω τυχαίο $(x, y, z) \in V$. Τότε

$$x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z$$

Επομένως

$$(x, y, z) = (-2y - 3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z) =$$

$$= y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1), \quad y, z \in \mathbb{R}$$

Αφού ο V έχει διάσταση 2 και παράγεται από τα δύο διανύσματα $(-2, 1, 0)$ και $(-3, 0, 1)$ μια βάση του είναι το σύνολο $\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$. ■