

## ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

### ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**ΑΣΚΗΣΗ 1.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int (x^2 - 6e^x) dx & 2) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & 3) \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx \\ 4) \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx & 5) \int (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^3}) dx & 6) \int \frac{2 + 3x^2}{x^2(1+x^2)} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 2.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx & 2) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx & 3) \int \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx \\ 4) \int \tan^2 x dx & 5) \int \frac{3 - 5 \cot^2 x}{\cos^2 x} dx & 6) \int \frac{1 - x^3 \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 3.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} dx & 2) \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx & 3) \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)} dx \end{array}$$

### Μέθοδος Αντικατάστασης

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{x}{x+1} dx & 2) \int \cos 5x dx & 3) \int (2x-6)^5 dx \\ 4) \int \sqrt{2-4x} dx & 5) \int \frac{1}{\sqrt{5x+3}} dx & 6) \int \frac{-6}{(2-x)^2} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx \quad 2) \int t\sqrt{t^2-7} dx \quad 3) \int x\sqrt[4]{1-x^2} dx$$

$$4) \int \frac{10x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad 5) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int \tan x dx \quad 2) \int \cot x dx \quad 3) \int \cos^3 x dx \quad \int \cos^2 x dx$$

$$4) \int \sin^3 x dx \quad 5) \int \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2 \sin \frac{t}{2} dt \quad 6) \int x \sin(2x^2) dx$$

$$7) \int \sin x \cos x dx \quad 8) \int \sin x \cos x (\sin x + \cos x) dx \quad 9) \int \sin^2 x dx$$

**ΑΣΚΗΣΗ 7.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int e^{e^x} e^x dx \quad 2) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad 3) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$4) \int \frac{e^x}{e^x - 5} dx \quad 5) \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad 6) \int \frac{e^{8x}}{1 + e^{8x}} dx$$

**ΑΣΚΗΣΗ 8.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int \frac{x^4 - \ln x}{x} dx \quad 2) \int \frac{1}{\sinh x} dx \quad 3) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$4) \int x e^{-(x^2-1)} dx \quad 5) \int \frac{1 + \ln x}{5 + x \ln x} dx$$

**ΑΣΚΗΣΗ 9.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int x^2 e^{x^3} dx \quad 2) \int \sqrt{\cos x} \sin x dx \quad 3) \int x^2 \sin x^3 dx$$

$$4) \int e^{\sin x} \cos x dx \quad 5) \int \tan 3x dx \quad 6) \int \tan x \sec^2 x dx$$

$$7) \int \cot x \csc^2 x dx \quad 8) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

**ΑΣΚΗΣΗ 10.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx & 2) \int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx & 3) \int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx \\
 4) \int \tan^5 x \sec^7 x dx & 5) \int \tan^5 x \csc^2 x dx & 6) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\
 7) \int \frac{1}{\sin^2(\ln x)x} dx & 8) \int \frac{\ln^2 x}{x} dx & 9) \int \frac{\ln 2t}{t} dt
 \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 11.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{1}{1+e^{-x}} dx & 2) \int \cos^4 \frac{x}{2} dx & 3) \int \frac{\sqrt[5]{1+\ln x}}{x} dx \\
 4) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx & 5) \int \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx & 6) \int \frac{x - \sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx
 \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 12.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \sin x \cos 5x dx & 2) \int \cos 7x \cos 3x dx & 3) \int \sin x \cos 2x dx \\
 4) \int \sin 2x \sin 4x dx
 \end{array}$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες  $2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ ,  $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$ ,  $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ )

**ΑΣΚΗΣΗ 13.** \* Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \sqrt{1-x^2} dx & 2) \int \ln(\cos x) \tan x dx & 3) \int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx \\
 4) \int \frac{dx}{1+\sin x} & 5) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx
 \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 14.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{dx}{a^2+x^2}, a \neq 0 & 2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0 & 3) \int \frac{dx}{3+x^2} \\
 4) \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} & 5) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx & 6) \int \frac{dx}{7x^2+5}
 \end{array}$$

Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες (παραγοντική)

**ΑΣΚΗΣΗ 15.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x e^x dx & 2) \int (3x - 1) e^{2x} dx & 3) \int x^2 e^{-x} dx \\ 4) \int x^3 e^{x^2} dx & 5) \int (x^2 + x + 1) e^x dx & 6) \int x^3 e^{-\frac{x}{2}} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 16.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x \cos x dx & 2) \int x \sin x dx & 3) \int 3x \sin 2x dx \\ 4) \int x^2 \cos \frac{x}{2} dx & 5) \int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx & \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 17.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int e^x \cos x dx & 2) \int e^x \sin x dx & 3) \int e^x \sin 2x dx \\ 4) \int \cos x \sin x dx & 5) \int \sin x \sin 3x dx & 6) \int e^{5x} \cos 4x dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 18.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \ln x dx & 2) \int \arctan x dx & 3) \int \arcsin x dx \\ 4) \int \sqrt{x} \ln x dx & 5) \int x^\kappa \ln x dx, \kappa \in \mathbb{N}^* & 6) \int \sin(\ln x) dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 19.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx & 2) \int \ln^2 x dx & 3) \int x \ln^2 x dx \\ 4) \int \frac{1}{x^5} \ln x dx & 5) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx & 6) \int \ln(2 + x^2) dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 20.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int x e^x \frac{1}{(1+x)^2} dx & 2) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx & 3) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \\ 4) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx & 5) \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx & 6) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 21.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \arcsin^2 x dx & 2) \int x \arctan^2 x dx & 3) \int x^2 \ln(x+1) dx \\ 4) \int x^2 \ln(x-1) dx & 5) \int x \tan^2 x dx & 6) \int \sec^3 x \tan x dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 22.** Να αποδειχθούν οι ακόλουθοι αναγωγικοί τύποι:

$$(1) \text{ Αν } I_n = \int \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \text{ τότε } I_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$(2) \text{ Αν } I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \text{ τότε } I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

$$(3) \text{ Αν } I_n = \int \tan^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \text{ τότε } I_n = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 23.** Να αποδειχθούν οι ακόλουθοι αναγωγικοί τύποι:

$$(1) \text{ Αν } I_n = \int \ln^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}^*, \text{ τότε } I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}.$$

$$(2) \text{ Αν } I_n = \int x^n e^{ax} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ τότε } I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}.$$

$$(3) \text{ Αν } I_n = \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^n} dx, \text{ τότε } I_n = \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} I_{n-1} + \frac{1}{a^2(2n-2)} \frac{x}{(a^2 - x^2)^{n-1}}.$$

Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

**ΑΣΚΗΣΗ 24.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1}{x-3} dx & 2) \int \frac{1}{6-x} dx & 3) \int \frac{5}{x^2+9} dx \\ 4) \int \frac{1}{5+x^2} dx & 5) \int \frac{x}{(4+x^2)^2} dx & 6) \int \frac{3x}{(6+x^2)^7} dx \\ 7) \int \frac{1}{(x^2+3)^2} dx & 8) \int \frac{12}{(2+x^2)^2} dx & 9) \int \frac{x+6}{(6+x^2)^2} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 25.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1}{x^2+x+1} dx & 2) \int \frac{1}{x^2-x+1} dx & 3) \int \frac{1}{x^2+2x+4} dx \\ 4) \int \frac{x+1}{5+4x+x^2} dx & 5) \int \frac{2x-3}{x^2-5x+7} dx & 6) \int \frac{x+5}{x^2-x+1} dx \\ 7) \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx & 8) \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2} dx & 9) \int \frac{3x-4}{(x^2+4x+9)^2} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 26.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{x+4}{x^2+5x+6} dx & 2) \int \frac{1}{x^2+2x} dx & 3) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx \\ 4) \int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx & 5) \int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2} dt & 6) \int \frac{e^t}{e^{2t}+2e^t+1} dt \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 27.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx & 2) \int \frac{x-1}{x^3+1} dx & 3) \int \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx \\ 4) \int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} dx & 5) \int \frac{1}{x^4+1} dx & 6) \int \frac{2x+3}{x^3+x^2+3x-5} dx \end{array}$$

(Υπόδειξη:  $x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ .)

Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int R(\sin x, \cos x) dx$

**ΑΣΚΗΣΗ 28.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx & 2) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx & 3) \int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} \\ 4) \int \frac{1}{\sin x} dx & 5) \int \frac{1}{\cos x} dx & \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 29.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx & 2) \int \cos^2 x \sin^3 x dx & 3) \int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx \\ 4) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx & 5) \int \cos^5 x dx & 6) \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \\ 7) \int \sin^2 x \cos^2 x dx & 8) \int \sin^2 x \cos^5 x dx & \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 30.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx & 2) \int \frac{1}{1 + \sin x} dx & 3) \int \frac{dx}{1 - \sin^2 x} \\ 4) \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x} & \int \frac{dx}{1 + \sin x} & \end{array}$$

Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1}}, \dots, \sqrt[m_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_n}}\right) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με την αντικατάσταση  $u = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , όπου  $m = \text{ε.κ.π.}(m_1, \dots, m_n)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 31.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} & 2) \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx & 3) \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x} dx \\ 4) \int \frac{1}{x(x-1)} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} dx & 5) \int \frac{x^{\frac{3}{4}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} dx & 6) \int \frac{dx}{x + x^{\frac{3}{5}}} \end{array}$$

Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με την αντικατάσταση  $u = \sqrt{ax+b}$   
ή  $u = \sqrt{cx+d}$

**ΑΣΚΗΣΗ 32.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int \frac{x + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} dx \quad 2) \int \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{4-t}} dt \quad 3) \int \frac{1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1}} dx$$

Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int x^\varrho (a + bx^\beta)^\delta dx, \varrho, \beta, \delta \in \mathbb{Q}$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Εάν  $\delta \in \mathbb{Z}$ ,  $\varrho = \frac{k}{\lambda}$ ,  $\beta = \frac{\mu}{\nu}$ , τότε θέτουμε  $x = u^\tau$ , όπου  $\tau = \epsilon\kappa\pi(\lambda, \nu)$
- Εάν  $\frac{\varrho+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta = \frac{\mu}{\nu}$ , τότε θέτουμε  $a + bx^\beta = u^\nu$
- Εάν  $\left(\frac{\varrho+1}{\beta} + \delta\right) \in \mathbb{Z}$ ,  $\delta = \frac{\mu}{\nu}$ , τότε θέτουμε  $a + bx^\beta \frac{a + bx^\beta}{x^\beta} = u^\nu$

**ΑΣΚΗΣΗ 33.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int x^5 \sqrt{-1+x^3} dx \quad 2) \int x^7 (x^4+1)^{2/3} dx \quad 3) \int \sqrt[3]{x} (2+\sqrt{x})^2 dx$$

$$4) \int (\sqrt{x})^{-1} \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx \quad 5) \int \frac{1}{x-x^{3/5}} dx \quad 6) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int R(x, \sqrt{\pm(a^2 \pm b^2 x^2)}) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με την αντικατάσταση  $\frac{bx}{a} = \sin \omega$  ή  $\cos \omega$  ή  $\tan \omega$  ή  $\cot \omega$  ή  $\sec \omega$  ή  $\csc \omega$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 34.** Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} \quad 2) \int \sqrt{3 - 4x^2} dx \quad 3) \int \sqrt{2x - x^2} dx$$

$$4) \int \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}} dx \quad 5) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx \quad 6) \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(\text{Υπόδειξη:} (\sec \omega + \tan \omega)' = \sec \omega \tan \omega + \sec^2 \omega)$$

Ολοκληρώματα της Μορφής  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται με την αντικατάσταση  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$ , όταν  $a > 0$  και την αντικατάσταση  $kx \pm \lambda = \mu \sin t$  όταν  $a < 0$  φέρνοντας το τριώνυμο στη μορφή  $\mu^2 - (kx \pm \lambda)^2$ . Επίσης, αν  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \rho_1)(x - \rho_2)}$ , τότε θέτουμε  $\sqrt{a(x - \rho_1)(x - \rho_2)} = t(x - \rho_1)$  ή  $t(x - \rho_2)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 35.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}} \quad 2) \int \frac{x dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 4}} \quad 3) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad 5) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx \quad 6) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x + 2}} dx$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**ΑΣΚΗΣΗ 36.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_0^\pi \cos x \, dx & 2) \int_0^\pi \sin x \, dx & 3) \int_1^2 \left( e^x - 5\sqrt{x\sqrt{x}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
4) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx & 5) \int_1^2 \frac{3t-5}{t^2} dt & 6) \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1} dx + \int_1^0 \frac{dx}{x^2+1}
\end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 37.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_0^1 \arctan x \, dx & 2) \int_0^\pi e^{2x} \sin x \, dx & 3) \int_0^2 x \ln(x+2) dx \\
4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx & 5) \int_0^1 (2x-3)e^x dx & 6) \int_1^e x^2 \ln x \, dx
\end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 38.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx & 2) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x} & 3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx \\
4) \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx & 5) \int_0^3 \arctan \sqrt{x} dx & 6) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \frac{x}{2} dx
\end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 39.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2-4} dx & 2) \int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx & 3) \int_0^4 \frac{dx}{x^2+9}
\end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 40.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x - \sin x| \, dx & 2) \int_{-1}^2 x |x| \, dx & 3) \int_{-1}^1 |x| (2x^2 - 1) dx \\
4) \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1, & x < 0 \\ e^x - 5, & x \geq 0 \end{cases}
\end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 41.** Να αποδείξετε ότι αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-a, a]$  και

(1) περιττή, τότε  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .

(2) άρτια, τότε  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 42.** Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 2x \, dx & 2) \int_1^3 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx & 3) \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{25-4x^2} dx \\ 4) \int_{-3}^3 \frac{x\sqrt{x^2+\tan^2 x}}{\cos x - \coth^8 5x} dx & 5) \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx & 6) \int_{-6}^{-3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx \\ 7) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} & 8) \int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx & \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 43.** Να λυθεί η εξίσωση

$$\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4t-2}} = \frac{\pi}{4}$$

(απ.  $x = 3$ )

**ΑΣΚΗΣΗ 44.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan \theta} d\theta = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 45.** Υπολογίστε την παράγωγο των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \int_a^{x^5} \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt & 2) f(x) = \int_a^{x^3} \cos^3 t \, dt \\ 3) f(x) = \int_x^a \frac{dt}{1 + t^2 + \sin^2 t} & 4) f(x) = \int_a^b \frac{x}{1 + t^2 + \sin^2 t} dt \\ 5) f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \sin^2 t} dt & \end{array}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

A) Υπολογισμός Εμβαδού Επίπεδου Χωρίου

**ΑΣΚΗΣΗ 46.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από:

**α:** τη  $C_f$  της  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  και τον άξονα των  $x'x$ .

**β:** τη  $C_f$  της  $f(x) = x^2 - 7x + 10$  και τον άξονα των  $x'x$ .

**γ:** τη  $y^2 = x - 1$ , τον άξονα των  $y'y$  και τις ευθείες  $y = -1$ ,  $y = 1$ .

**δ:** τη  $C_f$  της  $f(x) = -x^2 + 1$  και τον άξονα των  $x'x$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 47.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

**α:**  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$

**β:**  $y^2 = 4x$ ,  $y = x$

**γ:**  $x = 2y^2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3$

**δ:**  $y = 2 - x^2$ ,  $y = -x$

**ε:**  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  για  $x \in [0, 2\pi]$

B) Υπολογισμός Μήκους Καμπύλης

**ΑΣΚΗΣΗ 48.** Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης:

**α:**  $y = x^{\frac{3}{2}}$  για  $x \in [0, 4]$

$$\beta: x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y} \text{ από } y = 1 \text{ ως } y = 4$$

$$\gamma: y = \ln(\cos x) \text{ για } x \in [0, \frac{\pi}{6}]$$

$$\delta: x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2} \text{ για } 1 \leq y \leq 2$$

**ΑΣΚΗΣΗ 49.** Να υπολογισθεί το μήκος της:

$$\alpha: \text{αστροειδούς καμπύλης } x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$\beta: \text{καμπύλης που βρίσκεται στο } 1\text{o και } 4\text{o τεταρτημόριο και ορίζεται από τις καμπύλες } y^2 = 2x^3 \text{ και } x^2 + y^2 = 20$$

**ΑΣΚΗΣΗ 50.** Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις:

$$\alpha: x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

$$\beta: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma: x = e^\theta \sin \theta, y = e^\theta \cos \theta, \theta \in [0, \pi]$$

Γ) Υπολογισμός Εμβαδού Επιφάνειας εκ Περιστροφής

**ΑΣΚΗΣΗ 51.** Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή :

$$\alpha: \text{του ημικυκλίου } x^2 + y^2 = 3 \text{ γύρω από τον άξονα των } x$$

$$\beta: \text{του τόξου της καμπύλης } y = \sin 2t \text{ από το } A(0,0) \text{ ως το } B(\frac{\pi}{2},0) \text{ γύρω από τον άξονα των } x$$

$$\gamma: \text{της αστροειδούς καμπύλης } x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}, r > 0 \text{ γύρω από τον άξονα των } x$$

δ: του τόξου της καμπύλης  $9ax^2 = y(3a - y)^2$ ,  $a > 0$  για  $y \in [0, 3a]$   
γύρω από τον άξονα των  $y$

Δ) Υπολογισμός Όγκου Στερεού εκ Περιστροφής

**ΑΣΚΗΣΗ 52.** Να υπολογισθεί ο όγκος των στερεών τα οποία προκύπτουν από την περιστροφή των ακόλουθων επίπεδων χωρίων που ορίζονται από τις καμπύλες:

α:  $y^2 = 8x$  και  $x = 2$  γύρω από τον άξονα των  $x$

β:  $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  γύρω από τον άξονα των  $y$

γ:  $y^2 = 8x$ ,  $x = 2$  γύρω από την ευθεία  $x = 2$

δ:  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = -x + 4$  γύρω από τον άξονα των  $x$

ε:  $y^2 = 4 - x$ ,  $2y + x = 4$  γύρω από τον άξονα των  $y$

στ:  $y = x^2$ ,  $y^2 = 8x$  γύρω από τον άξονα των  $y$

(απ. α)  $16\pi$ , β)  $48\pi/5$ , γ)  $256\pi/15$ , δ)  $64\pi/3$ , ε)  $8\pi/3$ , στ)  $24\pi/5$  )

**ΑΣΚΗΣΗ 53.** Να υπολογισθεί ο όγκος του ελλειψοειδούς που προκύπτει από την περιστροφή της έλλειψης  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  γύρω από τον άξονα  $Ox$ .

(απ.  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ )

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

α) α' είδους

**ΑΣΚΗΣΗ 54.** Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} & 2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} & 3) \int_{-\infty}^0 e^{3x} dx \\ 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} & 5) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx & 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \end{array}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 55.** Να υπολογίσετε το  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\rho} dx$  για τις διάφορες τιμές του  $\rho \in \mathbb{R}$ .

(απ.  $+\infty$  όταν  $\rho \leq 1$  και  $\frac{1}{\rho-1}$  όταν  $\rho > 1$ )

**ΑΣΚΗΣΗ 56.** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της  $y = \frac{1}{1+x^2}$  γύρω από την οριζόντια ασύμπτωτή της.

(απ.  $\frac{\pi^2}{2}$ )

β) β' είδους

**ΑΣΚΗΣΗ 57.** Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll} 1) \int_0^1 \ln x \, dx & 2) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx & 3) \int_1^e \frac{1}{x \ln^{1/3} x} dx \\ 4) \int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{(x-2)}} dx & 5) \int_2^{10} \frac{5}{(x-2)^5} dx & 6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \end{array}$$

γ) γ' είδους

**ΑΣΚΗΣΗ 58.** Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$1) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \qquad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx \qquad 3) \int_{-e}^e 2t \ln |t| dt$$