Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2012

1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(α) (15 μονάδες) Υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα AB και την ορίζουσα του πίνακα BA. Είναι ο πίνακας BA αντιστρέψιμος;

(β) (5 μονάδες) Λύστε το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$.

(γ) (5 μονάδες) Να εξετάσετε αν υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ για τον οποίο ο πίνακας CA είναι αντιστρέψιμος.

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ και το σύνολο $W = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X^t = AXB\}$.

(α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(β) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη διάσταση του W και βρείτε μια βάση αυτού.

(γ) (10 μονάδες) Βρείτε μια βάση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης $T : W \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $T(X) = AX$ για $X \in W$.

3. Δίνονται διανυσματικοί χώροι U, V, W επί του $\mathbb{R}$ με διατεταγμένες βάσεις $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ και $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, αντίστοιχα, και γραμμικές απεικονίσεις $T : U \to V$ και $S : V \to W$ με $T(u_1) = v_1 - v_2$, $T(u_2) = v_2 + 2v_3$, $T(u_3) = v_1 + v_2 + 4v_3$, $S(v_1) = w_1 + 2w_2$, $S(v_2) = -w_2 + w_3$ και $S(v_3) = w_1 + 2w_3$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τον πίνακα της $S \circ T$ ως προς τις βάσεις $\mathbf{u}$ και $\mathbf{w}$ και εκφράστε το $S(T(u_1 + u_2 + u_3))$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων w_1, w_2 και w_3 της βάσης $\mathbf{w}$.

(β) (10 μονάδες) Ποια είναι η τάξη (διάσταση της εικόνας) της $S \circ T$; Υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις των U και W ως προς τις οποίες ο πίνακας της $S \circ T$ έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο;

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε τις διαστάσεις των υπόχωρων $\mathrm{im}(T)$ και $\ker(S)$ του V. Αληθεύει ότι $\mathrm{im}(T) + \ker(S) = V$;

4. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

(α) (5 μονάδες) Υπάρχουν υπόχωροι U, V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{1\times 3}$ τέτοιοι ώστε $U \cap V = \{(x\ \ x\ \ x) \in \mathbb{R}^{1\times 3} : x \geq 0\}$.

(β) (5 μονάδες) Αν $\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V διάστασης 5 και $\mathcal{B}$ είναι βάση του V, τότε υπάρχει $v \in \mathcal{B}$ ώστε το $\{u_1, u_2, u_3, v\}$ να είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

(γ) (5 μονάδες) Αν $T : \mathbb{R}^{4\times 4} \to \mathbb{R}^{3\times 5}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ τέτοιος ώστε $T(X) = O$.

(δ) (5 μονάδες) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι ισοδύναμος προς τον $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και ισχύει $B^2 = O$, τότε $A^2 = O$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/2/2012 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία