ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009
ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΤΕ ΤΑ ΚΑΤΩΤΕΡΩ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ …………………………………………………………………………………

ΟΝΟΜΑ………………………………………………………………………..……………..

ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ………...………………………………………………………………

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:

□□□□ □□□□ □□□□□

ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΣΕΤΕ ΜΕ ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Α) Το ονοματεπώνυμο σας να γραφτεί **καθαρά** ανωτέρω, καθώς και ο **13**-ψηφιος ΑΜ.
Β) Στο θρανίο σας πλην ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΛΗΣ, της κόλλας της θεμάτων-εξέτασης, και της ταυτότητας, **ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΙΠΟΤΑ ΑΛΛΟ.**
ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ, Τα κινητά τηλέφωνα θα είναι απολύτως ΚΛΕΙΣΤΑ σε τσάντες και τσέπες.
Γ) Πρέπει να λυθούν και τα **3 θέματα,** τα οποία είναι βαθμολογικώς ισοδύναμα. Κάθε θέμα θα γραφτεί **αποκλειστικά** στις δύο σελίδες του φύλλου όπου έχει γραφτεί η εκφώνηση του και ΜΟΝΟΝ ΕΚΕΙ. Για πρόχειρο θα χρησιμοποιηθούν οι σελίδες 2, 11, 12.
Δ) Εάν τυχόν κάποιος ενδιαφερθεί ενδεχομένως μετά την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων να ζητήσει επανεξέταση του γραπτού, θα πρέπει οπωσδήποτε να θυμάται **την ΑΙΘΟΥΣΑ και την ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ** στα οποία εξετάστηκε.
Ε) Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2.30’** ώρες μετά την διανομή των θεμάτων.

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Δίδονται οι παρακάτω πληροφορίες, τις οποίες δύνασθε, **εφ όσον το επιθυμείτε** κατά την απόλυτη επιλογή σας, να χρησιμοποιήσετε για την λύση των θεμάτων.
1) Δίνεται ο εξής τύπος του βιβλίου, προς **προαιρετική** χρήση κατά την απόλυτη κρίση σας:
$[f(x)]_b=(f\text{: a, b})[x]_a$, όπου τα σύμβολα a, b, είναι διατεταγμένες βάσεις, η f είναι γραμμική απεικόνιση και x είναι διάνυσμα στο πεδίο ορισμού της. Επιπλέον $[x]_a$ είναι η ΣΤΗΛΗ των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού του x, όταν ο x γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της διατεταγμένη βάσης a .
2) Ένα γραμμικό σύστημα νxν, έχει ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΛΥΣΗ, αν και μόνον αν η ορίζουσα των συντελεστών του είναι διάφορος του 0.
ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ ΣΑΣ ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Για τους Βαθμολογητές: Κάθε θέμα βαθμολογείται με ένα δεκαδικό ψηφίο με άριστα 3,4

ΘΕΜΑ 1	ΘΕΜΑ 2	ΘΕΜΑ 3	ΑΘΡΟΙΣΜΑ
□	□	□	□

ΘΕΜΑ 1. Α) Έστω Χ διανυσματικός χώρος, Α ένα μη κενό υποσύνολο του που είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και χ ένα στοιχείο του Χ που δεν ανήκει στο Α. Έστω ότι το χ ΔΕΝ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Α

Α). Ερωτάται: έπεται εξ αυτών ότι το σύνολο $A\cup\{\chi\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ?

Β) Θεωρούμε τα 4 στοιχεία του R^4 , τα Κ=(1, 1, 0, 118), Λ=(0, -1, 1, 118), Μ=(-1, 0, 1, 118), Ν=(0, 0, 2, 354). Να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου <Κ, Λ, Μ, Ν>.

Γ) Υπάρχει στοιχείο Π του R^4 ώστε το σύνολο {Κ, Λ, Μ, Π}να είναι βάση του R^4 ?.

ΘΕΜΑ 2. Α) Έστω θ: Τ→Φ είναι μία γραμμική απεικόνηση όπου Τ, Φ είναι γραμμικοί χώροι στους πραγματικούς. Εστω ότι $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\lambda$ είναι βάση του kerθ που αποτελείται από λ στοιχεία, όπου λ θετικός ακέραιος και $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu$ είναι βάση του imθ που αποτελείται από μ στοιχεία, όπου μ θετικός ακέραιος. Εστω ότι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ είναι στοιχεία του Τ, τέτοια ώστε $\theta(\varphi_1)=\tau_1$, $\theta(\varphi_2)=\tau_2$, … $\theta(\varphi_\mu)=\tau_\mu$, . Εστω ζ είναι στοιχείο του Τ, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ είναι πραγματικοί και $\theta(\zeta)= \rho_1\tau_1+\rho_2\tau_2+\ldots+ \rho_\mu\tau_\mu$. Να αποδειχθεί ότι το στοιχείο $(\zeta- \rho_1\varphi_1+\rho_2\varphi_2+\ldots+ \rho_\mu\varphi_\mu)$, είναι γραμμικός συνδυασμός των $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\lambda$.

Β) Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα του μέρους Α) με τις εξής εξειδικεύσεις: λ=μ=4, $T=\Phi=R^4$. Έστω ότι $\varepsilon_1=(1, 0, 0, 0)$ $\varepsilon_2 =(0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 =(0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4= (0, 0, 0, 1)$ και ισχύει $\theta(\varepsilon_1)= \varepsilon_2$, $\theta(\varepsilon_2)= \varepsilon_1$, $\theta(\varepsilon_3)= \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\theta(\varepsilon_4)= - \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

α) Να αποδειχθεί ότι η διάσταση του kerθ είναι 2 και να βρεθεί μία βάση του.

β) Να αποδειχθεί ότι η διάσταση του Imθ είναι 2 και να βρεθεί μία βάση του.

Γ) Με βάση τις συμβάσεις του μέρους Β) της άσκησης αυτής, να βρεθεί ο πίνακας της θ ως προς τις διατεταγμένες βάσεις (ε_1 , ε_2 , $-\varepsilon_1 -\varepsilon_2 +\varepsilon_3$, $-\varepsilon_1 +\varepsilon_2 +\varepsilon_4$) και (ε_2 , ε_1 , ε_3 , ε_4). (ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ. Δεν χρειάζεται να αποδειχθεί ότι είναι βάσεις).

ΘΕΜΑ 3. Α) Εστω Κ είναι ένας νxν πίνακας με πραγματικούς συντελεστές. Έστω ότι για κάθε λ πραγματικό, η ορίζουσα του πίνακα $(K-\lambda I_\nu)$ είναι διάφορη του 0. Έστω ότι υπάρχει $X \in R^{\nu x1}$ και φ πραγματικός έτσι ώστε $K \cdot X = \varphi X$. Να αποδειχθεί ότι X=0.

Β) Εστω λ πραγματικός και Ν είναι ο 4x4 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-5 & \lambda-7 & \lambda-9 \\ \lambda & 2\lambda-10 & \lambda-7 & \lambda-9 \\ \lambda & \lambda-5 & 2\lambda-14 & \lambda-9 \\ \lambda & \lambda-5 & \lambda-7 & 2\lambda-18 \end{pmatrix}$$

α) Να ευρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ, για τις οποίες η τιμή της ορίζουσας του Ν είναι 0.

β) Ερωτάται, υπάρχουν πραγματικές τιμές του λ τέτοιες ώστε το 4x4 σύστημα

$NX=\begin{pmatrix} 1492 \\ 192 \\ 1789 \\ 118 \end{pmatrix}$ να έχει μία και μοναδική λύση ?. (ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ. Χ είναι η στήλη των 4 αγνώστων του συστήματος).

ΠΡΟΧΕΙΡΟ