ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

9 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΤΕ ΤΑ ΚΑΤΩΤΕΡΩ ΜΕ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΕΠΩΝΥΜΟ …………………………………………………………………………………

ΟΝΟΜΑ……………………………………………………………………..……………..

ΟΝΟΜΑ ΠΑΤΡΟΣ………...……………………………………………………………

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ:

□□□□ □□□□ □□□□□

ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

ΠΑΡΑΚΑΛΕΙΣΘΕ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΣΕΤΕ ΜΕ ΠΡΟΣΟΧΗ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ:

Α) Το ονοματεπώνυμο σας να γραφτεί **καθαρά** ανωτέρω, καθώς και ο **13**-ψηφιος ΑΜ.

Β) Στο θρανίο σας πλην ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΥΛΗΣ, της κόλλας της θεμάτων-εξέτασης, και της ταυτότητας, **ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΙΠΟΤΑ ΑΛΛΟ. Τα κινητά τηλέφωνα απολύτως ΚΛΕΙΣΤΑ σε τσάντες.**

Γ) Πρέπει να λυθούν και τα **4 θέματα.**

Δ) Δίνεται ο εξής τύπος του βιβλίου, προς **προαιρετική** χρήση κατά την απόλυτη κρίση σας: $[f(x)]_b=(f\!: a, b)[x]_a$, όπου τα σύμβολα a, b, είναι διατεταγμένες βάσεις..

Ε) Εάν τυχόν κάποιος ενδιαφερθεί ενδεχομένως μετά την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων να ζητήσει επανεξέταση του γραπτού, θα πρέπει να θυμάται **την ΑΙΘΟΥΣΑ και την ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ** στα οποία εξετάστηκε.

Ζ) Ως πρόχειρο θα χρησιμοποιηθούν **αποκλειστικά** οι 3 σελίδες που έχουν την επικεφαλίδα ΠΡΟΧΕΙΡΟ.

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ ΣΑΣ ΕΥΧΟΝΤΑΙ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

ΘΕΜΑ 1. Α) Έστω Χ διανυσματικός χώρος, Α ένα μη κενό υποσύνολο του και χ ένα στοιχείο του Χ που δεν ανήκει στο Α. Έστω ότι το χ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Α. Ερωτάται: έπεται εξ αυτού ότι το σύνολο AU{χ} είναι γραμμικά εξηρτημένο?
Β) Θεωρούμε τα 5 στοιχεία του R^4 α=(2, -2, 3, 1), β=(1, 1, 1, 1), γ=(3, -1, 4, 2), δ=(0, 0, 1, 1), ε=(1, 1, 0, 0). Να βρεθεί υποσύνολο του {α, β, γ, δ, ε} το οποίο είναι βάση του < α, β, γ, δ, ε>.

ΘΕΜΑ 2. Α**)** Εστω ότι, Α είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του R, ν θετικός ακέραιος >2, $α_1$, $α_2$, ..., $α_ν$ είναι ν διαφορετικά στοιχεία του χώρου που αποτελούν βάση του, β ένα στοιχείο του Α, τα $λ_1$, $λ_2$, ..., $λ_ν$ ανήκουν στο R, ισχύει $λ_2 \neq 0$ και επιπλέον, ισχύει η ισότητα $β= λ_1α_1 + λ_2α_2 +... λ_να_ν$. Ερωτάται: οι υποθέσεις αυτές είναι αρκετές για να συμπεράνουμε ότι τα $α_1$, β, $α_3$, ..., $α_ν$ αποτελούν και αυτά βάση του Α ?
Β) Δίδονται τα διανύσματα του R^4 α=(1, 0, 0, 1), β=(1, 0, 0, 0), γ=(0, 1, 0, 0), δ=(0, 0, 1, 0), ε=(0, 1, 1, 0), ζ=(1, 1, 1, 0). Δίδεται και ΔΕΝ χρειάζεται να το αποδείξετε, ότι τα σύνολα {α, β, γ, δ} και {ε, ζ} είναι και τα δύο ανεξάρτητα.
Ερωτάται : Υπάρχει βάση του R^4 {ε, ζ, χ, ψ}, όπου τα χ, ψ είναι κάποια από τα α, β, γ, δ ? Αν υπάρχει, να βρεθεί μια τέτοια βάση.

ΘΕΜΑ 3. Α) Έστω λ πραγματικός και Α ένας νxν πίνακας με πραγματικούς όρους. Έστω ότι υπάρχει διάνυσμα χ του $R^{\nu x1}$ διάφορο του μηδενικού διανύσματος, τέτοιο ώστε Α·χ=λχ.

α) Ερωτάται: Με τις προϋποθέσεις αυτές είναι δυνατόν ο πίνακας $(A\text{-}\lambda I_\nu)$ να είναι αντιστρέψιμος ?.

β) Ερωτάται: Με τις προϋποθέσεις αυτές είναι δυνατόν η ορίζουσα του $(A\text{-}\lambda I_\nu)$ να είναι ≠0 ?.

Β) Εστω ότι α, είναι πραγματικός αριθμός και Α είναι ο 4x4 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \alpha^2-4 & \alpha^3+1 & 2\alpha+3 & 5\alpha^2+1 \\ \alpha^2-4 & 2\alpha^3+3 & 5\alpha+11 & 7\alpha^2+10 \\ \alpha^2-4 & \alpha^3+1 & 5\alpha+6 & 12\alpha^2-7 \\ \alpha^2-4 & \alpha^3+1 & 2\alpha+3 & 6\alpha^2+4 \end{pmatrix}$$

α) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του Α

β) Να βρεθεί για ποιες πραγματικές τιμές του α, ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος.

ΘΕΜΑ 4. Α) Έστω A, B είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και τα α, β είναι διατεταγμένες βάσεις τους αντιστοίχως. Έστω ότι φ, τ : $A \rightarrow B$ είναι γραμμικές απεικονίσεις. Ερωτάται : Υπό τις προϋποθέσεις αυτές, αν (φ: α, β)=(τ: α, β), έπεται πάντα ότι $\varphi=\tau$?

Β) Στον διανυσματικό χώρο R^3 θεωρούμε τις δύο διατεταγμένες βάσεις $\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)$ $\beta=(\beta_1 , \beta_2 , \beta_3)$ όπου $\alpha_1 =(2, 1, 0)$ $\alpha_2 =(-2, 0, 2)$ $\alpha_3= (0, 1, 1)$, $\beta_1 =(-1, -3, 2)$, $\beta_2 =(0, -1, -2)$, $\beta_3 =(0, 0, -1)$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ που έχει τύπο $\varphi(\chi, \psi, \zeta)= (\chi+\psi, \psi-\zeta, \zeta-\chi)$

(ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ. Δεν χρειάζεται να αποδειχθεί ότι είναι βάσεις η ότι είναι γραμμική απεικόνιση. Η κανονική διατεταγμένη βάση του R^3 είναι η $(\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3)$ με $\varepsilon_1 =(1,0,0)$, $\varepsilon_2 =(0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$.

α) Να εκφρασθούν τα ε_1 , ε_2 , ε_3 , σαν γραμμικός συνδυασμός των β_1 , β_2 , β_3 .

β) Να εκφρασθούν τα $\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2)$, $\varphi(\alpha_3)$, σαν γραμμικός συνδυασμός των ε_1 , ε_2 , ε_3 .

γ) να βρεθεί ο πίνακας (φ: α, β)

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

ΠΡΟΧΕΙΡΟ