Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση
Μέρος Α

Δημήτριος Μπετσάκος
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη 2009

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι ένα διδακτικό εγχειρίδιο εισαγωγικό στην Πραγματική Ανάλυση. Απευθύνεται κυρίως σε φοιτητές που έχουν ήδη μελετήσει τις βασικές έννοιες τού Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Το κύριο προαπαιτούμενο είναι η καλή κατανόηση τού Λογισμού μιάς πραγματικής μεταβλητής (ακολουθίες, όρια, συνέχεια, παραγώγιση, ολοκλήρωση). Χρειάζονται επίσης τα εντελώς βασικά στοιχεία Τοπολογίας και Λογισμού πολλών μεταβλητών.

Το βιβλίο περιέχει έξι κεφάλαια. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει μεγάλη ποικιλία ασκήσεων. Πολλές από αυτές προέρχονται από τα βιβλία που παρατίθενται στη Βιβλιογραφία και μάλιστα από τη συλλογή ασκήσεων [3]. Σε κάθε κεφάλαιο, μετά τις ασκήσεις ακολουθούν Σημειώσεις. Αυτές έχουν ιστορικό και βιβλιογραφικό χαρακτήρα. Ο κύριος σκοπός τους είναι να δώσουν κίνητρο στον αναγνώστη να ψάξει σε βιβλία και άρθρα για θέματα που συμπληρώνουν αυτά που υπάρχουν στο παρόν βιβλίο. Στις σημειώσεις υπάρχει μια πληθώρα αναφορών· τα κύρια όμως βοηθήματά μας κατά τη συγγραφή τού βιβλίου ήταν τα πολύ καλά βιβλία τής Βιβλιογραφίας. Οι παράγραφοι με αστερίσκο ($*$) μπορούν να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση. Οι ασκήσεις με $*$ είναι πιό δύσκολες από τις υπόλοιπες.

Μεγάλο μέρος τού βιβλίου προέρχεται από τις διδακτικές σημειώσεις που χρησιμοποιώ τα τελευταία χρόνια στο Τμήμα Μαθηματικών τού Α.Π.Θ.. Θέλω και από εδώ να ευχαριστήσω όλους τους φοιτητές και συναδέλφους που με τις παρατηρήσεις και τις διορθώσεις τους βοήθησαν στην βελτίωση των αρχικών σημειώσεων.

Το βιβλίο είναι αφιερωμένο στους γονείς μου τους οποίους ευχαριστώ τόσο για την αγάπη μου για τα Μαθηματικά όσο και για τη συνεχή τους στήριξη στη μαθηματική μου πορεία.

Κεφάλαιο 1

Αριθμοί και Ακολουθίες

Μερικοί συμβολισμοί που θα χρησιμοποιούμε πολύ συχνά:
$\mathbb{R}$ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
$\mathbb{Q}$ Το σύνολο των ρητών αριθμών.
$\mathbb{Z}$ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{N}$ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{1, 2, \dots\}$.

1.1 Πραγματικοί αριθμοί

Έστω $E \subset \mathbb{R}$. Το E ονομάζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $b \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \ \ x \leq b.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός b ονομάζεται **άνω φράγμα** τού E. Ο αριθμός $M \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **μέγιστο** τού E αν είναι άνω φράγμα τού E και $M \in E$. Αν το E είναι άνω φραγμένο, τότε έχει πολλά άνω φράγματα. Αν έχει μέγιστο, αυτό είναι μοναδικό. Το μέγιστο τού E συμβολίζεται με $\max E$.

Το E ονομάζεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\forall x \in E, \ \ x \geq a.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός a ονομάζεται **κάτω φράγμα** τού E. Ο αριθμός $m \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **ελάχιστο** τού E αν είναι κάτω φράγμα τού E και $m \in E$. Το ελάχιστο τού E συμβολίζεται με $\min E$. Το E ονομάζεται **φραγμένο** αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Παράδειγμα 1.1.1 Το σύνολο $E = (0, 1] \cup (2, 3]$ είναι φραγμένο σύνολο και ισχύει $\max E = 3$· το E δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.2 Το σύνολο $(-\infty, 2)$ δεν είναι κάτω φραγμένο· είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.3 Το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο και $\min \mathbb{N} = 1$. Κάθε μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ικανοποιεί το παρακάτω αξίωμα:

Αξίωμα της πληρότητας: Έστω E ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Το σύνολο των άνω φραγμάτων τού E έχει ελάχιστο.

Ορισμός 1.1.4 Αν E είναι ένα μη κενο, άνω φραγμένο σύνολο, το ελάχιστο άνω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τού αξιώματος της πληρότητας) ονομάζεται **supremum** ή **άνω πέρας** τού E και συμβολίζεται με $\sup E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup E = +\infty$. Τέλος ορίζουμε $\sup \varnothing = -\infty$.

Πρόταση 1.1.5 *Έστω E ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων τού E έχει μέγιστο.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε το σύνολο $-E = \{-x : x \in E\}$. Το $-E$ είναι άνω φραγμένο· έστω $S = \sup(-E)$. Θα δείξουμε ότι το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Έστω $x \in E$. Τότε $-x \in -E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $-x \leq S$. Άρα $x \geq -S$, δηλαδή το $-S$ είναι κάτω φράγμα τού E. Τέλος αποδεικνύουμε ότι το $-S$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα τού E. Έστω a ένα κάτω φράγμα του E. Τότε το $-a$ είναι άνω φράγμα τού $-E$. Επειδή $S = \sup(-E)$, ισχύει $S \leq -a$, δηλαδή $a \leq -S$. □

Ορισμός 1.1.6 Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο, το μέγιστο κάτω φράγμα του (που υπάρχει λόγω τής Πρότασης 1.1.5) ονομάζεται **infimum** ή **κάτω πέρας** τού E και συμβολίζεται με $\inf E$. Αν το E είναι μη κενό αλλά δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε $\inf E = -\infty$. Επίσης ορίζουμε $\inf \varnothing = +\infty$.

Παρατήρηση 1.1.7 Ένα υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο· όμως κάθε υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ έχει supremum και infimum. Αν ένα σύνολο E έχει μέγιστο τότε $\max E = \sup E$· αν το E έχει ελάχιστο, τότε $\min E = \inf E$.

Πρόταση 1.1.8 (Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{R}$)
(α) *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.*
(β) *Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $nx > y$.*

Απόδειξη.
(α) Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε $S := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $S-1$ δεν είναι άνω φράγμα τού $\mathbb{N}$· άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $S-1 < m$, δηλαδή $S < m+1 \in \mathbb{N}$. Άτοπο.
(β) Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, δηλαδή $nx \leq y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε ο αριθμός y/x είναι άνω φράγμα τού $\mathbb{N}$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το (α). $\square$

Παράδειγμα 1.1.9 Έστω $E = \mathbb{N} \cup \{-1 + n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Το E δεν είναι άνω φραγμένο· άρα $\sup E = +\infty$. Επίσης $\inf E = -1$. Το E δεν έχει ούτε ελάχιστο, ούτε μέγιστο.

Παράδειγμα 1.1.10 Αν $E = (0,1) \cup \{2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\sup E = \max E = 2$ και $\inf E = 0$. Το E δεν έχει ελάχιστο.

Πρόταση 1.1.11 (α) *Αν E είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο και $S \in \mathbb{R}$, τότε*

$$S = \sup E \iff \begin{cases} \forall x \in E, \ \ x \leq S, \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in E \ \ \textit{τέτοιο ώστε} \ \ a > S - \varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

(β) *Αν E είναι ένα μη κενό, κάτω φραγμένο σύνολο και $s \in \mathbb{R}$, τότε*

$$s = \inf E \iff \begin{cases} \forall x \in E, \ \ x \geq s, \\ \forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in E \ \ \textit{τέτοιο ώστε} \ \ b < s + \varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο το (α). Η απόδειξη τού (β) είναι παρόμοια. Έστω ότι $S = \sup E$. Τότε το S είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $\forall x \in E$, $x \leq S$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το S είναι το ελάχιστο άνω φράγμα τού E, ο αριθμός $S - \varepsilon$ *δεν* είναι άνω φράγμα του E. Άρα υπάρχει $a \in E$ με $a > S - \varepsilon$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε: (i) $\forall x \in E$, $\ x \leq S$ και (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon$. Η (i) λέει ότι το S είναι άνω φράγμα τού E. Ας υποθέσουμε ότι το S δεν είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του E. Τότε υπάρχει ένα άνω φράγμα S' τού E με $S' < S$. Θέτουμε $\varepsilon = S - S'$. Λόγω της (ii) $\exists a \in E$ τέτοιο ώστε $a > S - \varepsilon = S'$. Άτοπο διότι το S' είναι άνω φράγμα τού E. Άρα $S = \sup E$. $\square$

Πρόταση 1.1.12 *Αν E είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε υπάρχουν ακολουθίες $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ και $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ τέτοιες ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup E \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \inf E.$$

Απόδειξη.
Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση που το E δεν είναι κάτω φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $b_n \in E$ με $b_n \leq -n$. Άρα $b_n \to -\infty = \inf E$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι κάτω φραγμένο. Έστω $s := \inf E \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.11(β) για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ και βρίσκουμε αριθμούς $b_n \in E$ με $b_n < s + \frac{1}{n}$. Επειδή $s = \inf E$ και $b_n \in E$, έχουμε $s \leq b_n$. Άρα

$$s \leq b_n < s + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} b_n = s$.

Η απόδειξη για το $\sup E$ είναι παρόμοια. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$, δηλαδή $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$· το ίδιο ισχύει και για το σύνολο των άρρητων αριθμών $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θεώρημα 1.1.13 (α) *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε υπάρχουν $q \in \mathbb{Q}$ και $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q, r \in (a, b)$.*
(β) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} q_n = a$.*
(γ) *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $\{r_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} r_n = a$.*

Απόδειξη.
(α) Εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.8 για $x = b-a$ και $y = 1$, βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ με $n(b-a) > 1$, δηλαδή $nb - na > 1$. Επειδή οι αριθμοί na, nb έχουν διαφορά μεγαλύτερη τού 1, θα υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ με $na < m < nb$, δηλαδή $a < m/n < b$. Άρα για το ρητό αριθμό $q := m/n$ ισχύει $q \in (a, b)$. Για να βρούμε άρρητο στο (a, b) εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.8 για $x = (b-a)\sqrt{2}$ και $y = 1$ και εργαζόμαστε όπως παραπάνω.
(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $b = a + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε μιά ακολουθία ρητών $\{q_n\}$ με $a < q_n < a + \frac{1}{n}$. Προφανώς $q_n \to a$.
(γ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (β). □

Ορισμός 1.1.14 *Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μιά συναρτηση. Ορίζουμε το supremum και το $infimum$ της f στο E με τις ισότητες*

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup\{f(x) : x \in E\} \quad \textit{και} \quad \inf_{x\in E} f(x) = \inf\{f(x) : x \in E\}.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς $\sup_E f$ *και* $\inf_E f$*. Ειδικά για ακολουθίες* $\{a_n\}$ *χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς*

$$\sup_n a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{και} \quad \inf_n a_n := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Αν η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ έχει μέγιστο (ελάχιστο), τότε $\max_E f(x) = \sup_E f(x)$ ($\min_E f(x) = \inf_E f(x)$). Όπως είναι γνωστό από το Λογισμό, κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστο και ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.15 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f έχει μέγιστο στο 0. Άρα $\sup_{\mathbb{R}} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 1$. Επειδή $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ισχύει $\inf_E f(x) = 0$. Η f δεν έχει ελάχιστο.

Παράδειγμα 1.1.16 Για τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}, \qquad x \in [-3, \sqrt{3}]$$

ισχύει

$$\sup_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = \max_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = f(-3) = 6$$

και

$$\inf_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = \min_{x\in[-3,\sqrt{3}]} f(x) = f(-1) = -\frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 1.1.17 Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}, \ \ x \in (0, \infty)$ είναι φθίνουσα. Άρα

$$\sup_{x\in(0,\infty)} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1,$$

$$\inf_{x\in(0,\infty)} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Παράδειγμα 1.1.18 Για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\sup_n a_n = \max_n a_n = 1$ και $\inf_n a_n = 0$.

Για την $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\sup_n a_n = \max_n a_n = 1/4$ και $\inf_n a_n = \min_n a_n = -1$.

Πρόταση 1.1.19 *Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μιά συνάρτηση, $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ένα σημείο συσσώρευσης τού E και αν τό όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει, τότε*

$$\inf_E f \le \lim_{x\to\xi} f(x) \le \sup_E f. \tag{1.3}$$

Απόδειξη.
Για κάθε $x \in E$, ισχύει

$$\inf_E f \le f(x) \le \sup_E f.$$

Παίρνουμε όρια για $x \to \xi$ και προκύπτει η (1.3). □

Θεώρημα 1.1.20 (α) *Αν $\{a_n\}$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$.*
(β) *Αν $\{b_n\}$ είναι μιά φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n a_n$.*

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη του (β) είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Έστω $M > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > M$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα $a_n > M$ για κάθε $n \ge n_o$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty = \sup_n a_n.$$

Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη, τότε $\sup_n a_n = S \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της Πρότασης 1.1.11, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{n_o} > S - \varepsilon$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, ισχύει $S \ge a_n > S-\varepsilon$, $\forall n \ge n_o$, δηλαδή $|a_n - S| < \varepsilon$, $\forall n \ge n_o$. Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. □

Θεώρημα 1.1.21 (Αρχή τού κιβωτισμού) *Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$, τότε $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \varnothing$. Αν επιπλέον $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε η τομή $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο.*

Απόδειξη.
Ισχύει $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, λόγω και τού Θεωρήματος 1.1.20, υπάρχουν τα όρια

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_n b_n \in \mathbb{R},$$

και μάλιστα ισχύει $a \le b$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$. Πράγματι, αν $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n \le x \le b_n$, $\forall n$ και επομένως $a \le x \le b$. Αντιστρόφως, αν $x \in [a, b]$, τότε $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n$, δηλαδή $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τέλος, αν $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε $a = b$. Άρα $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. □

1.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.2.1 Δυό σύνολα A, B ονομάζονται **ισοδύναμα** αν υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ πού είναι $1-1$ και επί. Αν τα A, B είναι ισοδύναμα σύνολα, γράφουμε $A \sim B$.

Είναι προφανές ότι αν η $f : A \to B$ είναι $1-1$ συνάρτηση, τότε το A είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού B. Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα 1.2.2 Ισχύει $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$ διότι η συνάρτηση $x \mapsto \tan^{-1} x$ απεικονίζει αμφιμονότιμα το $\mathbb{R}$ επί τού $(-\pi/2, \pi/2)$.

Πρόταση 1.2.3 *Αν $f : A \to B$ είναι μιά συνάρτηση, τότε το $f(A)$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού A.*

Απόδειξη.
Έστω $y \in f(A)$. Τότε το σύνολο $f^{-1}(\{y\})$ είναι μη κενό. Επιλέγουμε ένα στοιχείο του x και ορίζουμε $g(y) := x$. Έτσι ορίζεται μια $1-1$ συνάρτηση $g : f(A) \to A$. Έστω $A_1 := g(f(A)) \subset A$. Η g είναι $1-1$ συνάρτηση τού $f(A)$ επί τού A_1. Άρα $f(A) \sim A_1$. $\square$

Πόρισμα 1.2.4 *Αν η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι επί, τότε το B είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού A.*

Ορισμός 1.2.5 Ένα σύνολο A ονομάζεται **πεπερασμένο** αν $A = \varnothing$ ή $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς το A ονομάζεται **άπειρο**. Ένα σύνολο A ονομάζεται **αριθμήσιμο** αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο πού δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο ονομάζεται **υπεραριθμήσιμο**. Αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε λέμε ότι είναι **το πολύ αριθμήσιμο**.

Παράδειγμα 1.2.6 Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ με

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{αν} \quad n \geq 1, \\ -2n+1, & \text{αν} \quad n \leq 0. \end{cases}$$

Η f είναι $1-1$ και επί. Άρα $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2.7 Κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $k = 2^{m-1}(2n-1)$, όπου m, n κατάλληλοι φυσικοί. Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης η f είναι επί. Εύκολα φαίνεται ότι είναι και $1-1$. Άρα $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.2.8 *Αν $A \subset \mathbb{N}$ και A άπειρο, τότε $A \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη.
Το A είναι άπειρο, άρα μη κενό. Έστω $x_1 = \min A$. Το $A \setminus \{x_1\}$ είναι μη κενο. Έστω $x_2 = \min(A \setminus \{x_1\})$. Το $A \setminus \{x_1, x_2\}$ είναι μη κενο. Έστω $x_3 = \min(A \setminus \{x_1, x_2\})$. Συνεχιζοντας επαγωγικά βρίσκουμε $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in A$ με $x_n = \min(A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\})$. Επειδή το A είναι άπειρο, το σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$ είναι επίσης άπειρο και επομένως μη φραγμένο.

Θα δείξουμε ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Έστω $x \in A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον x_k με $x_k > x$ (διότι αν $x_k \leq x$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε το $\{x_1, x_2, \dots\}$ θα ήταν φραγμένο). Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_1 < \dots < x_{n-1} < x < x_n$. Άτοπο διότι $x_n = \min A \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ορίζουμε $f : A \to \mathbb{N}$ με $f(x_k) = k$. Η f είναι προφανώς $1-1$ και επί· άρα $A \sim \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση 1.2.9 Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε υπάρχει $f : \mathbb{N} \to A$ που είναι $1-1$ και επί. Θέτουμε $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Μιά τέτοια γραφή τού A ονομάζεται **αρίθμηση** τού A.

Οι παρακάτω προτάσεις αποδεικνύονται με τη μέθοδο της απόδειξης της Πρότασης 1.2.8. Οι αποδείξεις αφήνονται γιά άσκηση.

Πρόταση 1.2.10 *Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και $B \subset A$, τότε το B είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Πρόταση 1.2.11 *Κάθε άπειρο σύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο.*

Θεώρημα 1.2.12 *Αν τα σύνολα A_j, $j = 1, 2, \dots$ είναι το πολύ αριθμήσιμα, τότε η ένωσή τους $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη.
Έστω ότι
$$A_j = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots\},\ j = 1, 2, \dots$$
Θεωρούμε το σύνολο $X := \{(j, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a_{ji} \in \cup_{j=1}^{\infty} A_j\}$. Ορίζουμε $f : X \to \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ με $f(j, i) = a_{ji}$. Η f είναι συνάρτηση επί. (Η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνάρτηση $1-1$ διότι τα σύνολα A_j εν γένει δεν είναι ξένα). Από την Πρόταση 1.2.3, το σύνολο $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο του X, άρα και τού $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ το οποίο είναι αριθμήσιμο. Επομένως το $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. □

Παράδειγμα 1.2.13 Αν $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$ είναι προφανώς αριθμήσιμο. Όμως

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Λόγω τού Θεωρήματος 1.2.12, το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.2.14 *Το διάστημα $(0, 1)$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη.
Αρκεί να δείξουμε ότι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ας υποθέσουμε ότι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$$

μιά αρίθμησή του. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία κλειστά διαστήματα ίσου μήκους:

$$[0, 1] = [0, 1/3] \cup [1/3, 2/3] \cup [2/3, 1].$$

Έστω I_1 ένα από αυτά τα διαστήματα που δεν περιέχει το x_1. Χωρίζουμε το I_1 σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και ονομάζουμε I_2 ένα από αυτά που δεν περιέχει το x_2. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε μιά φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $\{I_n\}$. Το μήκος τού I_n είναι $1/3^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Από την αρχή τού κιβωτισμού υπάρχει μοναδικό $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Τότε $x = x_m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι $x_m \notin I_m$. □

Παράδειγμα 1.2.15 Αν $a < b$, το διάστημα (a, b) είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο διότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

απεικονίζει αμφιμονότιμα το (a, b) επί τού $(0, 1)$.

Πόρισμα 1.2.16 *Κάθε υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ πού περιέχει ένα διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.*

1.3 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.3.1 *Μιά ακολουθία $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται* **υπακολουθία** *τής ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \dots$ τέτοιοι ώστε $b_k = a_{n_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $\{\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n!}\}$ και $\{\frac{1}{2n}\}$ είναι όλες υπακολουθίες της $\{\frac{1}{n}\}$. Η ακολουθία $\{a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots\}$ και οι ακολουθίες $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$.

Παρατήρηση 1.3.2 Αν $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ.

Θεώρημα 1.3.3 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό.*

Απόδειξη.
Έστω $\{a_n\}$ μιά φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχουν αριθμοί $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$m_1 \leq a_n \leq M_1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $I_1 = [m_1, M_1]$. Διαιρούμε το I_1 σε δύο ισομήκη κλειστά διαστήματα

$$\left[m_1, \frac{m_1 + M_1}{2}\right] \quad \text{και} \quad \left[\frac{m_1 + M_1}{2}, M_1\right].$$

Σε ένα τουλάχιστον από αυτά τα δύο διαστήματα υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Διχοτομούμε το I_2 και παρατηρούμε πάλι ότι σε τουλάχιστο ένα από τα υποδιαστήματα πού προκύπτουν υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_n\}$. Ονομάζουμε I_3 αυτό το υποδιάστημα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικάσία κατασκευάζουμε μιά ακολουθία διαστημάτων

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_j \supset \ldots$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0 και ότι το I_j περιέχει άπειρους όρους της $\{a_n\}$.

Από της αρχή του κιβωτισμού (Θεώρημα 1.1.21), υπάρχει μαναδικό $\ell \in \cap_{j=1}^{\infty} I_j$. Θα δείξουμε ότι μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ. Αν $k \in \mathbb{N}$, το διάστημα $(\ell - 1/k, \ell + 1/k)$ περιέχει ένα τουλάχιστον από τα διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ (διότι όλα περιέχουν το ℓ και η ακολουθία των μηκών τους τείνει στο 0). Κάτασκευάζουμε τώρα την $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ επαγωγικά ως εξής:

Έστω $n_1 := \min\{n \geq 1 : a_n \in (\ell - 1, \ell + 1)\}$ και

$$n_k := \min\left\{n \geq n_{k-1} + 1 : a_n \in \left(\ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Τότε $|a_{n_k} - \ell| < \frac{1}{k}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \ell.$$

□

Παράδειγμα 1.3.4 Μιά φραγμένη ακολουθία μπορεί να έχει πολλές συγκλίνουσες υπακολουθίες με διαφορετικά όρια. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 2, 1, -1, 2, 1, -1, 2, \dots\}$$

έχει μιά υπακολουθία, την $\{a_{3n-2}\}$, που συγκλίνει στο 1, μιά άλλη υπακολουθία που συγκλίνει στο -1, και μιά τρίτη υπακολουθία που συγκλίνει στο 2.

Μιά ακολουθία που δεν είναι φραγμένη, ασφαλώς δεν συγκλίνει. Όμως μπορεί να έχει υπακολουθία που συγκλίνει. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ περιττός}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

δεν είναι φραγμένη, αλλά η υπακολουθία των άρτιων όρων της συγκλίνει στο 0.

Πρόταση 1.3.5 (α) *Αν μιά ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο* $+\infty$.
(β) *Αν μιά ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει υπακολουθία που τείνει στο* $-\infty$.

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε το (α)· η απόδειξη τού (β) είναι παρόμοια. Έστω λοιπόν ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα ο αριθμός 1 δεν είναι άνω φράγμα της. Θα έχει λοιπόν όρους μεγαλύτερους τού 1. Θέτουμε

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1\}.$$

Ο αριθμός 2 δεν είναι άνω φράγμα τής ακολουθίας $\{a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots\}$. Θέτουμε

$$n_2 = \min\{n > n_1 : a_n > 2\}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά θέτουμε

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} : a_n > k\}, \quad k = 3, 4, \dots.$$

Έτσι κατασκευάσαμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} > k$. Προφανώς ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty.$$

□

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 1.4.1 *Μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε*

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Πρόταση 1.4.2 *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1$ βρίσκουμε n_o τέτοιο ώστε

$$\forall m, n \geq n_o, \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ειδικότερα

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - a_{n_o}| < 1.$$

Επομένως

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n| < 1 + |a_{n_o}|.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_o - 1}|, 1 + |a_{n_o}|\}$ και παρατηρούμε ότι

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M.$$

□

Πρόταση 1.4.3 *Αν μιά ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$ έχει μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.*

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $k_o, k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\forall k \geq k_o, \quad |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\forall m, n \geq k_1, \quad |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $k_2 = \max\{k_o, k_1\}$. Έστω $k \geq k_2$. Τότε $n_k \geq k \geq k_2 \geq k_o$. Άρα $|a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $n_k, k \geq k_2 \geq k_1$. Επομένως $|a_{n_k} - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Τελικά λοιπόν, αν $k \geq k_2$, τότε

$$|a_k - \ell| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

το οποίο σημαίνει ότι $\lim_{k\to\infty} a_k = \ell$. □

Θεώρημα 1.4.4 *Μιά ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq n_o, \quad |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έστω $m, n \geq n_o$. Τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αντιστρόφως, έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.2, η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Λόγω της Πρότασης 1.4.3 και η ίδια η $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα. $\square$

Παράδειγμα 1.4.5 Η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι Cauchy. Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Αν η $\{a_n\}$ ήταν ακολουθία Cauchy, τότε για $\varepsilon = \frac{1}{3}$, θα υπήρχε $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{2n_o} - a_{n_o}| < \frac{1}{3}$. Άτοπο. Άρα η $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

1.5 Οριακοί αριθμοί ακολουθίας

Ορισμός 1.5.1 Λέμε ότι ο επεκτεταμένος αριθμός $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ είναι **οριακός αριθμός** της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$.

Παράδειγμα 1.5.2 Η ακολουθία με όρους

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς, το 1 και το -1.

Παράδειγμα 1.5.3 Έστω $\{a_n\}$ η ακολουθία με όρους

$$1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Κάθε φυσικός αριθμός είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$. Επίσης υπάρχει υπακολουθία τής $\{a_n\}$ που συγκλίνει στο $+\infty$. Άρα και το $+\infty$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$. Εύκολα φαίνεται ότι η $\{a_n\}$ δεν έχει άλλους οριακούς αριθμούς. Επομένως το σύνολο των οριακών αριθμών τής $\{a_n\}$ είναι το $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Παρατήρηση 1.5.4 Αν μιά ακολουθία συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ℓ. Άρα η ακολουθία έχει μόνο έναν οριακό αριθμό, το ℓ.

Παρατήρηση 1.5.5 Μιά ακολουθία $\{a_n\}$ έχει ένα τουλάχιστον οριακό αριθμό. Πράγματι άν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη τότε έχει ένα τουλάχιστον πραγματικό οριακό αριθμό, λόγω τού Θεωρήματος 1.3.3. Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι φραγμένη τότε, λόγω τής Πρότασης 1.3.5, ένα τουλάχιστον από τα $+\infty, -\infty$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.

Θεώρημα 1.5.6 *Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο K όλων των οριακών αριθμών της $\{a_n\}$.*
(α) *Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε τό K είναι μη κενό, φραγμένο σύνολο που έχει μέγιστο και ελάχιστο.*
(β) *Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$ και $+\infty \in K$.*
(γ) *Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $-\infty \in K$, $\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{-\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει μέγιστο.*
(δ) *Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\infty \in K$, $-\infty \notin K$ και το σύνολο $K \setminus \{\infty\}$ είτε είναι το κενό, είτε είναι κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών που έχει ελάχιστο.*

Απόδειξη.
(α) Το K είναι μη κενό λόγω του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $x \in K$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to x$. Όμως $-M \leq a_{n_k} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα $-M \leq x \leq M$. Επομένως το K είναι φραγμένο σύνολο.

Θέτουμε $\sup K = a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in K$. Για $k \in \mathbb{N}$, το $a - 1/k$ δεν είναι άνω φράγμα τού K. Άρα υπάρχει $\ell_k \in K$ με

$$a - \frac{1}{k} < \ell_k \leq a.$$

Επομένως σε καθένα από τα διαστήματα $(a-1/k, a]$, $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν άπειροι όροι τής $\{a_n\}$. Κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ ως εξής: Έστω

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-1, a]\},$$

$$n_2 = \min\{n > n_1 : a_n \in (a-1/2, a]\}$$

και επαγωγικά

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} : a_n \in (a-1/k, a]\}$$

Τότε $a - 1/k < a_{n_k} \leq a$ κι επομένως $a_{n_k} \to a$. Άρα $a \in K$ και $a = \max K$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\inf K = \min K$.

(β) Λόγω τής Πρότασης 1.3.5, η $\{a_n\}$ έχει δυό υπακολουθίες που συγκλίνουν στο ∞ και στο $-\infty$ αντίστοιχα. Άρα $\infty, -\infty \in K$.

(γ) Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη από το $M \in \mathbb{R}$ και δεν είναι κάτω φραγμένη. Από την Πρόταση 1.3.5, ισχύει $-\infty \in K$. Έστω $\ell \in K \setminus \{-\infty\}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $a_{n_j} \to \ell$. Προφανώς $\ell \leq M$. Άρα το M είναι άνω φράγμα τού $K \setminus \{-\infty\}$. Η απόδειξη ότι το $K \setminus \{-\infty\}$ (όταν δεν είναι κενό) έχει μέγιστο είναι ίδια με την αντίστοιχη απόδειξη στο (α).

(δ) Η απόδειξη είναι παρόμοια με τού (γ). $\square$

Χάρη στο θεώρημα που μόλις αποδείξαμε μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.7 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία.
(α) Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε: Ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **ανώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\limsup a_n$. Ο μικρότερος οριακός αριθμός της ονομάζεται **κατώτερο όριο** τής $\{a_n\}$ και συμβολίζεται με $\liminf a_n$.
(β) Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη , θέτουμε $\limsup a_n = +\infty$ και $\liminf a_n = -\infty$.
(γ) Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη, τότε $\liminf a_n = -\infty$. Αν το $-\infty$ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, τότε $\limsup a_n = -\infty$. Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.
(δ) Αν η $\{a_n\}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\limsup a_n = \infty$. Αν το ∞ είναι ο μοναδικός οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, τότε $\liminf a_n = \infty$. Αν η $\{a_n\}$ έχει κι άλλους οριακούς αριθμούς, τότε το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.

Με συντομία μπορούμε να πούμε ότι το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$ και το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$.

Παράδειγμα 1.5.8 Η ακολουθία

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Ισχύει $K = \{\infty, -\infty\}$, $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

Παράδειγμα 1.5.9 Για την ακολουθία

$$1, 2, 3, \ldots$$

ισχύει $K = \{\infty\}$ και $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n = \infty$.

Παράδειγμα 1.5.10 Η ακολουθία

$$a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{2^n}$$

είναι φραγμένη και έχει ακριβώς δύο οριακούς αριθμούς: το 2 και το -2 (διότι ισχύει $a_{2n} \to 2$ και $a_{2n-1} \to -2$). Επομένως

$$\limsup a_n = 2, \qquad \liminf a_n = -2.$$

Παράδειγμα 1.5.11 Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Έστω $\{q_1, q_2, \ldots\}$ μια αρίθμησή του. Θεωρούμε την ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη. Άρα

$$\limsup q_n = +\infty, \qquad \liminf q_n = -\infty.$$

Θεώρημα 1.5.12 *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε*
(i) *$x \leq \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.*
(ii) *$x \geq \limsup a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.*
(iii) *$x \geq \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.*
(iv) *$x \leq \liminf a_n$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο το (i). Η απόδειξη των (ii), (iii) και (iv) είναι ανάλογη. Γιά την απόδειξη τού (i) θέτουμε $a = \limsup a_n$.

Υπόθέτουμε πρώτα ότι $x \leq a$ και παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to a$. Άρα υπάρχει $k_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $k \geq k_o$,

$$a_{n_k} > a - \varepsilon \geq x - \varepsilon.$$

Έπεται ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο, δηλαδή άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από το $x - \varepsilon$. Άρα υπάρχει μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} > x - \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία τής $\{a_{n_k}\}$ που συγκλίνει σε ένα αριθμό ℓ. Τότε ισχύει $x - \varepsilon \leq \ell \leq a$. Επειδή το ε είναι τυχαίος θετικός αριθμός, έπεται ότι $x \leq a$. $\square$

Θεώρημα 1.5.13 *Δίνονται μια ακολουθία $\{a_n\}$ και ένας αριθμός $\ell \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) $\lim a_n = \ell$.
(β) $\limsup a_n = \liminf a_n = \ell$.
(γ) *Κάθε υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο ℓ.*

Απόδειξη.
(γ)$\Rightarrow$ (α): Η $\{a_n\}$ είναι υπακολουθία τού εαυτού της. Άρα $a_n \to \ell$.
(α)$\Rightarrow$ (γ): Έστω ότι $a_n \to \ell$ και έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μιά υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ τής $\{a_n\}$. Επειδή $a_n \to \ell$, θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Αν $k \geq n_o$, τότε $n_k \geq k \geq n_o$. Άρα $|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. Άρα $a_{n_k} \to \ell$.
(γ)$\Rightarrow$ (β): Επειδή το $\limsup a_n$ είναι οριακός αριθμός τής $\{a_n\}$, θα υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Λόγω τού (γ), θα έχουμε $\limsup a_n = \ell$. Παρομοίως $\liminf a_n = \ell$.
(β)$\Rightarrow$ (α): Παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή το $\limsup a_n$ και το $\liminf a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 1.5.12, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n > \ell + \varepsilon\} \cup \{n \in \mathbb{N} : a_n < \ell - \varepsilon\}$$

είναι πεπερασμένο. Επομένως υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$, ισχύει $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to \ell$. $\square$

Θεώρημα 1.5.14 *Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία.*
(i) *Θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Τότε $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} =$*

$\lim b_n$.
(ii) *Θέτουμε* $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. *Τότε* $\liminf a_n = \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim c_n$.

Απόδειξη.
Η $\{b_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Άρα $b_n \to \inf b_n := b$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$.

Υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ της $\{a_n\}$ με $a_{n_k} \to \limsup a_n$. Όμως $a_{n_k} \leq b_{n_k}$ και $b_{n_k} \to b$. Άρα

$$\limsup a_n = \lim a_{n_k} \leq \lim b_{n_k} = b.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θα εφαρμόσουμε το (i) τού Θεωρήματος 1.5.12. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $b_n \to b$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$b_n > b - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_o. \tag{1.4}$$

Ειδικότερα

$$b_{n_o} = \sup\{a_k : k \geq n_o\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_1 \geq n_o$ τέτοιο ώστε $a_{k_1} > b - \varepsilon$. Εφαρμόζουμε τώρα την (1.4) για $n = k_1 + 1$ και παίρνουμε

$$b_{k_1+1} = \sup\{a_k : k \geq k_1 + 1\} > b - \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει $k_2 \geq k_1 + 1$ τέτοιο ώστε $a_{k_2} > b - \varepsilon$. Συνεχίζοντας έτσι κατασκευάζουμε υπακολουθία $\{a_{k_j}\}$ της $\{a_k\}$ με $a_{k_j} > b - \varepsilon$. Άρα το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > b - \varepsilon\}$ είναι άπειρο. Από το (i) τού Θεωρήματος 1.5.12, $\limsup a_n \geq b$. Έτσι το (i) αποδείχτηκε. Το (ii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Πρόταση 1.5.15 *Έστω* $\{a_n\}$ *μιά ακολουθία με* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Ισχύει*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ανισότητα· η τρίτη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο και η μεσαία είναι προφανής. Έστω

$$a := \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Προφανώς $a \geq 0$. Αν $a = 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a > 0$· (το a μπορεί να είναι και ∞). Παίρνουμε αριθμό b με $0 < b < a$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > b, \quad \forall k \geq N.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες για $k = N, N+1, \dots, n-1$ και προκύπτει ότι για κάθε $n > N$,

$$\frac{a_n}{a_N} > b^{n-N}.$$

Παίρνουμε n-στές ρίζες και βρίσκουμε: $\sqrt[n]{a_n} > b\sqrt[n]{b^{-N}a_N}$. Άρα

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf b\sqrt[n]{b^{-N}a_N} = b.$$

Τέλος παίρνουμε όρια για $b \to a$ και προκύπτει

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq a = \liminf \frac{a_{n+1}}{n}.$$

□

Παράδειγμα 1.5.16 Έστω

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός}, \\ 2^n, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Τότε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \text{ περιττός}, \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

και

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός}, \\ 2, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Άρα

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} = 1$$

και

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = 2 \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Παράδειγμα 1.5.17 Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία $a_n = n$. Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Παράδειγμα 1.5.18 Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.5.15 στην ακολουθία

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Ισχύει

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

1.6 Ασκήσεις

1.6.1 Δείξτε ότι κάθε μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο.
Υπόδειξη: Επαγωγή.

1.6.2 Έστω E ένα φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ με δύο τουλάχιστον σημεία. Δείξτε ότι:
(α) $-\infty < \inf E < \sup E < +\infty$.
(β) Αν το A είναι μη κενό υποσύνολο τού E, δείξτε ότι

$$\inf E \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup E.$$

1.6.3 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $-A = \{x : -x \in A\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

1.6.4 Δίνονται δύο μη κενά σύνολα A και B στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A + B &= \{x + y : x \in A,\ y \in B\}, \\ A - B &= \{x - y : x \in A,\ y \in B\}, \\ A \cdot B &= \{xy : x \in A,\ y \in B\}. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \text{ και } \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Αν επιπλέον $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ τότε

$$\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B).$$

1.6.5 Γιά $A, B \subset \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{και} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

1.6.6 Για $E \subset \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$, ορίζομε $tE := \{tx : x \in E\}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $t \geq 0$, τότε $\sup(tE) = t \sup E$ και $\inf(tE) = t \inf E$.
(β) Αν $t < 0$, τότε $\sup(tE) = t \inf E$ και $\inf(tE) = t \sup E$.

1.6.7 Αν f, g είναι δυό πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο E, δείξτε ότι

$$\inf_E (f+g) \geq \inf_E f + \inf_E g \quad \text{και} \quad \sup_E (f+g) \leq \sup_E f + \sup_E g.$$

1.6.8 Αν S και T είναι δυό υποσύνολα τού $\mathbb{R}$ και $s \leq t$ για κάθε $s \in S$ και $t \in T$, δείξτε ότι $\sup S \leq \inf T$.

1.6.9 Βρείτε το άνω και το κάτω πέρας των παρακάτω συνόλων.
(α) $A = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} : p, q, r \in \mathbb{N}\}$.
(β) $B = \{x : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.
(γ) $C = \{x : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$.

1.6.10 Δείξτε ότι

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

1.6.11 Βρείτε το sup και το inf των παρακάτω συνόλων.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ 2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(2 + \frac{3}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}, \\ B &= \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

1.6.12 Βρείτε το sup και το inf τού συνόλου

$$A = \{0.2,\ 0.22,\ 0.222, \dots\}.$$

1.6.13 Βρείτε το $\sup A$ και το $\inf A$ όπου A είναι το σύνολο των αριθμών τού $(0,1)$ οι οποίοι έχουν δεκαδική παράσταση πού έχει μόνο τα ψηφία 0 και 1. Βρείτε επίσης τα $\max A$ και $\min A$ εφόσον υπάρχουν.

1.6.14 Βρείτε τα $\sup A$, $\inf A$ και τα $\max A$, $\min A$ (εφόσον υπάρχουν), όπου

$$A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N},\ m < 2n \right\}.$$

1.6.15 Υπολογίστε τα

$$\begin{aligned} &\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\}, \\ &\inf\{x + x^{-1} : x > 0\}, \\ &\inf\{2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\}. \end{aligned}$$

1.6.16 Βρείτε τα sup και inf των παρακάτω συνόλων.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
B &= \left\{ \frac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
C &= \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
D &= \left\{ \frac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
E &= \left\{ \frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.
\end{aligned}$$

1.6.17 Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

1.6.18 Αποδείξτε τις Προτάσεις 1.2.10 και 1.2.11.

1.6.19 Δείξτε ότι ένα σύνολο είναι άπειρο αν και μόνο αν είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.

1.6.20 Δείξτε ότι αν A, B είναι δύο το πολύ αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

1.6.21 Δίνονται δύο ξένα σύνολα A και B. Δείξτε ότι αν το A είναι το πολύ αριθμήσιμο και το B είναι άπειρο σύνολο, τότε $A \cup B \sim B$.

1.6.22 Δείξτε ότι το διάστημα $(0, 1)$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

1.6.23 Δείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων είναι το πολύ αριθμήσιμο.

1.6.24 Δείξτε ότι το σύνολο των κύκλων στο επίπεδο με ρητή ακτίνα και κέντρα πού έχουν ρητές συντεταγμένες είναι αριθμήσιμο.

1.6.25 Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο.

1.6.26 Ένας αριθμός ονομάζεται *αλγεβρικός* αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Δείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

1.6.27 Δείξτε ότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους αριθμούς και μάλιστα το σύνολο των άρρητων σε κάθε διάστημα είναι υπεραριθμήσιμο.

1.6.28 Δείξτε ότι αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το B είναι το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο τού A, τότε $A \setminus B \sim A$.

1.6.29* (Θεώρημα τού Cantor). Το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων τού A. Δείξτε ότι κανένα σύνολο δεν είναι ισοδύναμο με το δυναμοσύνολό του.

1.6.30 Δείξτε ότι αν μιά ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$, τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ℓ.

1.6.31 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Δείξτε ότι $a_n \to \ell$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$ και $\{a_{2k-1}\}$ συγκλίνουν στο $\ell \in \mathbb{R}$. ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$).

1.6.32 Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + \cdots + \frac{\arctan n}{2^n}$$

είναι Cauchy.

1.6.33 Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ και ένας φυσικός N. Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq N$, δείξτε ότι

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{και} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

1.6.34 Δείξτε ότι αν μιά ακολουθία έχει μοναδικό οριακό αριθμό ℓ, τότε $a_n \to \ell$.

1.6.35 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n. \end{aligned}$$

1.6.36 Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ είναι δύο φραγμένες ακολουθίες με θετικούς όρους, δείξτε ότι

$$\begin{aligned} \liminf a_n \cdot \liminf b_n &\leq \liminf(a_n b_n) \leq \liminf a_n \cdot \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n b_n) \leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n. \end{aligned}$$

1.6.37 Δίνονται δύο ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, δείξτε ότι

$$\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$$

και

$$\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n.$$

1.6.38 Έστω $\{a_n\}$ μιά ακολουθία. Δείξτε ότι

$$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$$

και

$$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n.$$

1.6.39 Αποδείξτε το Θεώρημα 1.5.14 χωρίς την υπόθεση ότι η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη.

1.6.40 Δείξτε ότι μιά ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει (σε αριθμό ή σε ένα από τα $\pm\infty$) αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$.

1.6.41 Βρείτε το ανώτερο και το κατώτερο όριο των παρακάτω ακολουθιών:
(α) $\{2(-1)^n + \frac{1}{n!}\}$, (β) $\{3 + \frac{(-1)^n}{n}\}$.

1.6.42 Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}, \\ b_n &= \frac{(1-(-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}, \\ c_n &= \frac{(1+\cos n\pi)\log(3n) + \log n}{\log(2n)}, \\ d_n &= \left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

1.6.43 Υπολογίστε τα $\limsup$ και $\liminf$ για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n n, \\ b_n &= n^{(-1)^n n}, \\ c_n &= 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}, \\ d_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}, \\ e_n &= \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}. \end{aligned}$$

1.6.44 Για μιά ακολουθία $\{a_n\}$, οι υπακολουθίες $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$, και $\{a_{3k}\}$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η $\{a_n\}$ συγκλίνει.

1.6.45 Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\limsup a_n = x$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, άπειροι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$ και πεπερασμένου πλήθους όροι είναι μεγαλύτεροι από $x + \varepsilon$. Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κατώτερο όριο.

1.6.46 Αν το $\lim_{n\to\infty} a_n$ υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη και ισχύει $\inf_n a_n \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \sup a_n$.

1.6.47 Αν $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, είναι κλειστά διαστήματα με $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ και $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, τότε από την Αρχή τού Κιβωτισμού, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Θεωρούμε μιά ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1.6.48 Δείξτε ότι αν $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$, τότε το σύνολο $\{l, a_1, a_2, \ldots\}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο.

1.6.49 Έστω A ένα μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\inf A = s \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το s είναι κάτω φράγμα τού A και υπάρχει ακολουθία $\{a_n\} \subset A$ με $a_n \to s$.
Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το άνω πέρας.

1.6.50 Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία η οποία δεν έχει μέγιστο και έστω $S = \sup a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ με $a_{n_k} \to S$.
Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για το κάτω πέρας.

1.6.51* Δείξτε ότι το σύνολο των οριακών αριθμών τής ακολουθίας $a_n = \sin n$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$.

1.6.52 Έστω $\{q_1, q_2, \ldots\}$ μιά αρίθμηση τού $\mathbb{Q}$. Βρείτε το σύνολο των οριακών αριθμών τής ακολουθίας $\{q_n\}$.

1.6.53 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $\{a_n\}$ είναι μιά αύξουσα ακολουθία, τότε κάθε υπακολουθία της είναι αύξουσα.
(β) Υπάρχει ακολουθία που έχει άπειρους στο πλήθος οριακούς αριθμούς.
(γ) Αν η $\{b_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$ και η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{b_n\}$, τότε η $\{c_n\}$ είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$.

1.6.54 Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$. Ορίζουμε την ακολουθία $\{b_n\}$ θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(α) Δείξτε ότι αν $a_n \to a$, τότε $b_n \to a$.
(β) Σωστό ή Λάθος; Αν $b_n \to a$, τότε $a_n \to a$.
(γ)* Δείξτε ότι αν $b_n \to a$ και η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα, τότε $a_n \to a$.
(δ)* Δείξτε ότι

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \le \limsup b_n \le \limsup a_n.$$

1.6.55* Δείξτε ότι αν κάθε υπακολουθία $\{a_{n_k}\}$ μιάς ακολουθίας $\{a_n\}$ έχει υπακολουθία $\{a_{n_{k_j}}\}$ συγκλίνουσα στο ℓ, τότε $a_n \to \ell$.

1.6.56* Δείξτε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.

1.6.57* Δίνεται μιά ακολουθία $\{a_n\}$ που έχει την ιδιότητα $a_{n+1} - a_n \to 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{a_n\}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς a, b με $a < b$. Δείξτε ότι κάθε αριθμός του διαστήματος $[a, b]$ είναι οριακός αριθμός της $\{a_n\}$.

1.6.58* Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία τής $\{a_n\}$ συγκλίνει στο x, τότε $a_n \to x$.

1.6.59 Για το περίβλημα $\overline{E}$ τού E ισχύει

$$\sup \overline{E} = \sup E \quad \text{και} \quad \inf \overline{E} = \inf E.$$

1.6.60 Ο αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακός αριθμός της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \geq m$ τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.

1.7 Σημειώσεις

Μιά πιό πλήρης εισαγωγή στους πραγματικούς αριθμούς μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [1], [4], [5], [9]. Η κατασκευή τού $\mathbb{R}$ με τις τομές Dedekind υπάρχει στα βιβλία [4] και [7].

Τα αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα εισήχθηκαν από τον θεμελιωτή της Θεωρίας Συνόλων, G.Cantor. Περισσότερα σχετικά θεωρήματα υπάρχουν στα βιβλία [2], [8], καθώς και στο βιβλίο [A.N.Kolmogorov and S.V.Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover, 1975].

Οι έννοιες της ακολουθίας και της υπακολουθίας παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο σε όλους τους κλάδους της Ανάλυσης. Για περισσότερα παραδείγματα και ασκήσεις παραπέμπουμε στα [7], [9]. Ο R.M.Dudley [*Real Analysis and Probability*, Wadsworth, 1989] σημειώνει ότι απόδειξη τού Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass δε βρέθηκε στα γραπτά τού Bolzano. Στα βιβλία Τοπολογίας ο αναγνώστης μπορεί να βρεί γενικότερες διατυπώσεις τού Θεωρήματος αυτού· για παράδειγμα: *Κάθε ακολουθία σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειρών

Ορισμός 2.1.1 Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$ ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $s_n \to s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει στον αριθμό** s και γράφουμε

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ο αριθμός s ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς. Αν $s_n \to +\infty$ ή $s_n \to -\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει στο** $+\infty$ ή στο $-\infty$ και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad -\infty.$$

Αν μιά σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει**. Αν μιά σειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει**.

Πολλές φορές ασχολούμαστε και με σειρές της μορφής $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, όπου $N \in \mathbb{Z}$. Τότε για $n \geq N$, ορίζουμε $s_n = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n$. Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει αν η s_n συγκλίνει.

Γενικά είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το άθροισμα μιάς σειράς. Σε πολλές περιπτώσεις αρκεί να προσδιορίσουμε αν μιά σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν μιά σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim a_n = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 1.4.4) στην ακολουθία $\{s_n\}$ προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2 *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \Big| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq n_o.$$

Αν $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα. Επομένως από το Θεώρημα 1.1.20 προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.3 *Υποθέτουμε ότι $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ είναι φραγμένη.*

Παράδειγμα 2.1.4 (Η γεωμετρική σειρά) Γιά $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$· δηλαδή $a_n = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Ισχύει

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Άρα

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & x \neq 1, \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$$

Αν $x = 1$, τότε $s_n = n + 1 \to +\infty$. Αν $x = -1$, η $\{s_n\}$ δεν συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = 1$ και $\liminf s_n = 0$. Αν $x < -1$, τότε η $\{s_n\}$ δε συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\limsup s_n = +\infty$ και $\liminf s_n = -\infty$.

Η πιό ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $-1 < x < 1$. Τότε $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Ορισμός 2.1.5 *Λέμε ότι μιά σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.*

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

2.2 Κριτήρια σύγκλισης σειρών

Θεώρημα 2.2.1 (**Κριτήριο τού ολοκληρώματος**) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [m, \infty) \to [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα. Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^\infty f(x)\, dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη.
Θέτουμε

$$S(x) := \int_m^x f, \qquad x \in [m, \infty)$$

και

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} f(k), \qquad n \geq m.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα, θα έχουμε για κάθε $k \geq m$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Προσθέτοντας τις πρώτες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n-1$ προκύπτει

$$s_n - f(m) \leq \int_m^n f = S(n), \ \ n \geq m.$$

Προσθέτοντας τις δεύτερες ανισότητες από $k = m$ έως $k = n$ προκύπτει

$$S(n+1) = \int_m^{n+1} f \leq s_n, \ \ n \geq m.$$

Άρα $S(n+1) \leq s_n \leq S(n) + f(m), \ \ \forall n \geq m$. Από τις ανισότητες αυτές έπεται ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η συνάρτηση S είναι άνω φραγμένη. Επειδή

$$\int_m^\infty f = \lim_{x \to \infty} S(x),$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^\infty f(x)\, dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2.2.2 Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, x \in [1, \infty)$$

στο κριτήριο τού ολοκληρώματος εύκολα βρίσκουμε ότι η η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και από το κριτήριο συμπύκνωσης τού Cauchy (βλ. Άσκηση 2.6.23).

Παράδειγμα 2.2.3 Θέτουμε

$$f(x) = \frac{1}{x \log x (\log \log x)^p}, \quad x \in [3, \infty),$$

όπου p πραγματική παράμετρος. Επειδή ο λογάριθμος είναι αύξουσα συνάρτηση, η f είναι αυστηρά φθίνουσα και θετική για $x \geq 3 > e$. Κάνοντας την αντικατάσταση $u = \log \log x$, βρίσκουμε ότι

$$\int_3^n f(x)\, dx = \int_{\log \log 3}^{\log \log n} \frac{1}{u^p}\, du.$$

Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_3^\infty f$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Από το κριτήριο τού ολοκληρώματος συμπεραίνουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Θεώρημα 2.2.4 (**Κριτήριο σύγκρισης**) *Δίνονται οι σειρές* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *και* $\sum_{n=1}^\infty b_n$ *με* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(α) *Αν υπάρχουν* $M > 0$ *και* $n_o \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $n \geq n_o$, $|a_n| \leq M b_n$ *και αν η σειρά* $\sum_{n=1}^\infty b_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν υπάρχουν* $\delta > 0$ *και* $n_o \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $0 \leq \delta a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_o$ *και αν η σειρά* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *αποκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^\infty b_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$q_n = \sum_{k=n_o}^{n} a_k, \quad s_n = \sum_{k=n_o}^{n} |a_k|, \quad t_n = \sum_{k=n_o}^{n} b_k, \;\; n \in \mathbb{N},\; n \geq n_o.$$

(α) Από την υπόθεση ισχύει $s_n \leq M t_n, \quad \forall n \geq n_o$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^\infty b_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\{t_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα και η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη. Η $\{s_n\}$ είναι και αύξουσα· άρα συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=n_o}^\infty |a_n|$ συγκλίνει. Προφανώς και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ συγκλίνει, το οποίο σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ αποκλίνει, τότε η $\{q_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη. Από την υπόθεση, $0 \leq \delta a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_o$· άρα και η $\{t_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, άρα ούτε και συγκλίνουσα. $\square$

Παράδειγμα 2.2.5 Οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{και} \qquad \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να ελέγξουμε αν η υπόθεση τού κριτηρίου σύγκρισης ισχύει. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να φανεί χρήσιμο το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.6 (**Κριτήριο οριακής σύγκρισης**) *Δίνονται δυό ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ θετικών αριθμών.*
(α) *Αν*

$$\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R},$$

και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(β) *Αν*

$$\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0,$$

και αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Απόδειξη.
(α) Εφόσον $\limsup \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\limsup \frac{a_n}{b_n} < M$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.12) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} < M, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(β) Εφόσον $\liminf \frac{a_n}{b_n} > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 < \delta < \liminf \frac{a_n}{b_n}$. Τότε (βλ. Θεώρημα 1.5.12) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{a_n}{b_n} > \delta, \quad \forall n \geq n_o.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
$\square$

Παράδειγμα 2.2.7 Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5}$$

συγκλίνει. Πράγματι, εφαρμόζουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n^2-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Επειδή

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.2.8 Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5}$$

αποκλίνει. Αυτό προκύπτει από την εφαρμογή τού κριτηρίου οριακής σύγκρισης με

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n-5} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Θεώρημα 2.2.9 (**Κριτήριο τής ρίζας**) *Δίνεται η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(α) *Αν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη.
(α) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, μπορούμε να διαλέξουμε b τέτοιο ώστε $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < b < 1$. Από το Θεώρημα 1.5.12, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[n]{|a_n|} < b, \quad \forall n \geq n_o.$$

Άρα $|a_n| < b^n, \quad \forall n \geq n_o$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
(β) Αν $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, τότε $|a_n| > 1$ γιά άπειρα n. Άρα η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει στο 0. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Θεώρημα 2.2.10 **(Κριτήριο τού λόγου)** *Δίνεται η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(α) *Αν*

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

η σειρά συγκλίνει απολύτως.
(β) *Αν*

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη.
Από την Πρόταση 1.5.15 έχουμε

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Έτσι το κριτήριο τού λόγου είναι άμεση συνέπεια τού κριτηρίου της ρίζας. □

Παράδειγμα 2.2.11 Για τη σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

έχουμε $a_{2k-1} = \frac{1}{2^k}$ και $a_{2k} = \frac{1}{3^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\begin{aligned}
\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{3^k} = 0, \\
\liminf \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\limsup \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} = +\infty.
\end{aligned}$$

Το κριτήριο τού λόγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί, ενώ από το κριτήριο της ρίζας συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Παρατήρηση 2.2.12 Το κριτήριο τού λόγου είναι συχνά πιό εύχρηστο, πιό εύκολο στην εφαρμογή του. Όμως το κριτήριο της ρίζας είναι ισχυρότερο: όποτε το κριτήριο τού λόγου δίνει σύγκλιση, τότε και το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· όποτε το κριτήριο της ρίζας δεν οδηγεί σε συμπέρασμα, ούτε το κριτήριο τού λόγου οδηγεί σε συμπέρασμα· (βλ. απόδειξη τού κριτηρίου τού λόγου). Τέλος, υπάρχουν περιπτώσεις που το κριτήριο του λόγου δεν οδηγεί σε συμπέρασμα , ενώ το κριτήριο της ρίζας δίνει σύγκλιση· βλ. Παράδειγμα 2.2.11.

Θεώρημα 2.2.13 (**Κριτήριο γιά εναλλάσσουσες σειρές**) *Υποθέτουμε ότι* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ *και ότι* $\lim a_n = 0$. *Τότε η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

συγκλίνει.

Απόδειξη.
Παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα.

Επίσης, γιά $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - [(a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}] \\ &\leq a_1, \end{aligned}$$

δηλαδή η $\{s_{2n}\}$ είναι άνω φραγμένη. Θέτουμε $s := \lim s_{2n}$. Τότε

$$\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + a_{2n+1}) = s + 0 = s.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} = s.$$

Από την Άσκηση 1.6.31 προκύπτει ότι η $\{s_n\}$ είναι συκλίνουσα και $\lim s_n = s$.
□

Παράδειγμα 2.2.14 Η σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

συγκλίνει σε κάποιο αριθμό s. Επειδή $s_2 = 1/2$ και η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ είναι αύξουσα, ισχύει $s \geq 1/2$.

2.3 Αναδιατάξεις σειρών

Ορισμός 2.3.1 *Δίνεται μιά ακολουθία* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Μιά ακολουθία* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ονομάζεται* **αναδιάταξη** *τής* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση* $\mathbb{N} \ni n \mapsto k(n) \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε*

$$b_n = a_{k(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι αναδιάταξη τής* $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ονομάζεται* **αναδιάταξη της σειράς** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Παράδειγμα 2.3.2 Η ακολουθία

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots$$

και η ακολουθία

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{7}, \dots$$

είναι και οι δύο αναδιατάξεις της ακολουθίας $\{\frac{1}{n}\}$.

Παράδειγμα 2.3.3 Θεωρούμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots$$

Όπως είναι γνωστό από την προηγούμενη παράγραφο, η σειρά αυτή συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως. Επίσης για το άθροισμά της s ισχύει $s > 0$· βλ. Παράδειγμα 2.2.14.

Θεωρούμε και την αναδιάταξη

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - - + \dots \tag{2.1}$$

πού προκύπτει με την διαδοχική άθροιση ενός θετικού όρου και δύο αρνητικών. Συμβολίζουμε με s_n και με σ_n τα μερικά αθροίσματα της αρχικής σειράς και της αναδιάταξής της, αντιστοίχως. Ισχύει

$$\begin{aligned}
\sigma_{3n} &= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}) - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2} s_{2n}.
\end{aligned}$$

Άρα $\lim \sigma_{3n} = \frac{1}{2} \lim s_{2n} = \frac{1}{2} s$.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\lim \sigma_{3n-1} = \lim \sigma_{3n-2} = \lim \sigma_{3n} = \frac{1}{2} s.$$

Συνεπώς (γιατί;) η σειρά (2.1) συγκλίνει και μάλιστα το άθροισμά της είναι $\frac{1}{2} s \neq s$.

Το παραπάνω παράδειγμα δείχνει ότι η αναδιάταξη μιάς σειράς μπορεί να έχει άθροισμα διαφορετικό από αυτό της αρχικής σειράς. Το φαινόμενο αυτό-όπως δείχνουν τα ακόλουθα θεωρήματα-είναι χαρακτηριστικό των σειρών που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως.

Θεώρημα 2.3.4 *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε όλες οι αναδιατάξεις της συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.*

Απόδειξη.
Έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ μιά αναδιάταξή της με μερικά αθροίσματα σ_n.

Από το κριτήριο τού Cauchy υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $m > n \geq n_o$, $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Παίρνουμε όριο για $m \to \infty$ και προκύπτει

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_o. \tag{2.2}$$

Διαλέγουμε $p \in \mathbb{N}$ αρκούντως μεγάλο ώστε οι φυσικοί $1, 2, \ldots, n_o$ να περιέχονται όλοι στο σύνολο

$$\{k(1), k(2), \ldots, k(p)\}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη διαφορά $|\sigma_n - s_n|$ για $n \geq p$. Οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{n_o}$ απλοποιούνται κι έτσι, λόγω της (2.2), προκύπτει

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s_n| &= |a_{k(1)} + \cdots + a_{k(n)} - (a_1 + \cdots + a_n)| \\ &\leq |a_{n_o+1}| + |a_{n_o+2}| + \cdots < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει $p \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για $n \geq p$, ισχύει $|s_n - \sigma_n| < \varepsilon$, δηλαδή

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - \sigma_n) = 0.$$

Εφόσον η $\{s_n\}$ συγκλίνει, και η $\{\sigma_n\}$ θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο.
$\square$

Θεώρημα 2.3.5 (Riemann) *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιά σειρά πού συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$, υπάρχει αναδιάταξή της $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s.$$

Απόδειξη.
Έστω $s \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $s \geq 0$. Η περίπτωση $s < 0$ αντιμετωπίζεται με παρόμοιο τρόπο. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως, η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει άπειρους θετικούς και άπειρους αρνητικούς όρους. Έστω $\{p_n\}$ η ακολουθία των θετικών όρων και έστω $\{q_n\}$ η ακολουθία των αρνητικών όρων της $\{a_n\}$ με τη σειρά που εμφανίζονται. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και οι $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ είναι υπακολουθίες της $\{a_n\}$, έχουμε

$$\lim p_n = \lim q_n = 0. \tag{2.3}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty. \tag{2.4}$$

Ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p < \infty$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q \in \mathbb{R}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n_o+1}^{\infty} p_k < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=n_o+1}^{\infty} |q_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε φυσικό n_1 αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} \supset \{q_1, q_2, \ldots, q_{n_o}, p_1, p_2, \ldots, p_{n_o}\}.$$

Άρα για κάθε $m \geq n \geq n_1$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n_o+1}^{\infty} p_k + \sum_{k=n_o+1}^{\infty} |q_k| < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο σύγκλισης τού Cauchy, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Άτοπο.

Περίπτωση 2: $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty$.
Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n \geq N, \ \sum_{k=1}^{n} q_k < -M - p.$$

Επιλέγουμε φυσικό $n_o \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_N\} \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_o}\}.$$

Αν $n \geq n_o$, το άθροισμα $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ περιέχει περισσότερους από N όρους τής $\{q_n\}$ και κάποιους όρους τής $\{p_n\}$. Οι όροι τής $\{q_n\}$ έχουν άθροισμα μικρότερο τού $-M-p$, ενώ οι όροι τής $\{p_n\}$ έχουν άθροισμα μικρότερο τού p. Άρα
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < (-M-p) + p = -M.$$
Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$. Άτοπο.

Έτσι σε κάθε περίπτωση, η (2.4) αποδείχθηκε. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\infty. \tag{2.5}$$

Κατασκευάζουμε τώρα την αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ως εξής: Ξεκινούμε με τον όρο p_1 και προσθέτουμε τόσους όρους της $\{p_n\}$ όσους απαιτούνται για να ξεπεράσουμε τον αριθμό s. Στη συνέχεια προσθέτουμε τόσους (αρνητικούς) όρους της $\{q_n\}$ όσους απαιτούνται ώστε το άθροισμα να γίνει μικρότερο τού s. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε λόγω τών (2.4) και (2.5). Μετά προσθέτουμε όρους της $\{p_n\}$ ώστε να ξαναξεπεράσουμε το s. Ύστερα προσθέτουμε πάλι όρους της $\{q_n\}$ ώστε το άθροισμα να ξαναγίνει μικρότερο τού s κ.ο.κ.. Έτσι δημιουργούμε μια αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με μερικά αθροίσματα σ_n. Είναι προφανές ότι
$$|\sigma_n - s| \leq \max\{p_{n_k}, |q_{n_m}|\},$$
όπου $\{p_{n_k}\}$, $\{q_{n_m}\}$ είναι υπακολουθίες των $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ αντιστοίχως. Λόγω της (2.3), ισχύει $\lim \sigma_n = s$. □

2.4 Παραστάσεις αριθμών

Καθε δεκαδικός αριθμός $x = 0.k_1k_2\ldots$ είναι **εξ ορισμού** το άθροισμα μιάς σειράς, δηλαδή
$$x = \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \ldots$$
Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός $x \in (0,1)$ έχει μιά δεκαδική παράσταση όπως η παραπάνω.

Πρόταση 2.4.1 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$. Αν για τους όρους της ακολουθίας $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $0 \leq k_n \leq p-1$, τότε η σειρά*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$
συγκλίνει προς έναν αριθμό πού ανήκει στο διάστημα $[0,1]$.

Απόδειξη.
Επειδή ο γενικός όρος της σειράς είναι μη αρνητικός, αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμός 1 είναι άνω φράγμα της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Πράγματι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{k_n}{p^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{p-1}{p^n} \leq (p-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1.$$

□

Πρόταση 2.4.2 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0,1]$. Υπάρχει μοναδική ακολουθία ακεραίων αριθμών $\{k_n\}$ τέτοια ώστε:*
(α) $0 \leq k_n \leq p-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
(β)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n},$$

(γ) $k_n \neq 0$ *για άπειρα* n.

Απόδειξη.
Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{k_n\}$ επαγωγικά: Έστω k_1 ο μεγαλύτερος ακέραιος με $k_1/p < x$. Τότε $0 \leq k_1 \leq p-1$ και $k_1/p < x \leq (k_1+1)/p$. Έστω k_2 ο μεγαλύτερος ακέραιος με

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x.$$

Τότε ισχύει $0 \leq k_2 \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2+1}{p^2}.$$

Συνεχίζοντας έτσι προκύπτει μια ακολουθία ακεραίων $\{k_n\}$ τέτοια ώστε $0 \leq k_n \leq p-1$ και

$$\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n}{p^n} < x \leq \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \cdots + \frac{k_n+1}{p^n}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Επομένως

$$0 < x - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{p^j} \leq \frac{1}{p^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}. \tag{2.8}$$

Αν υπήρχε $j_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k_j = 0,\ \forall j \geq j_o$, τότε η (2.7) θα ερχόταν σε αντίθεση με την (2.8). Άρα υπάρχουν άπειρα n για τα οποία $k_n \neq 0$.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} \tag{2.9}$$

με $0 \leq a_n \leq p-1,\ 0 \leq b_n \leq p-1,\quad \forall n \in \mathbb{N}$ και άπειρα από τα a_n και από τα b_n είναι μη μηδενικά. Έστω m ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_m > b_m$, δηλαδή ότι $a_m \geq b_m + 1$. Από την (2.7) προκύπτει ότι

$$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m}{p^m} < x \leq \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m + 1}{p^m}. \tag{2.10}$$

και

$$\frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m}{p^m} < x \leq \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m + 1}{p^m}. \tag{2.11}$$

Άρα

$$x > \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_m}{p^m} \geq \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \cdots + \frac{b_m + 1}{p^m} \geq x.$$

Άτοπο. □

Για έναν αριθμό $x \in (0,1]$, αν ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{p^n}$$

με $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $0 \leq k_n \leq p-1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η παραπάνω σειρά ονομάζεται p-αδική (ή παιδική!) παράσταση τού x. Συνήθως γράφουμε $x = 0.k_1k_2k_3\ldots$ (βάση p) ή $x = 0._p k_1k_2k_3\ldots$. Αν $k_n = 0$ από ένα δείκτη και πέρα, τότε η παράσταση λέγεται τερματιζόμενη. Η Πρόταση 2.4.2 εγγυάται την ύπαρξη για κάθε $x \in (0,1]$ μίας και μοναδικής μη τερματιζόμενης παράστασης τού

x. Υπάρχουν όμως $x \in (0,1)$ με δύο p-αδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, ισχύει

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n},$$

δηλαδή $1/2 = 0.5000\dots = 0.4999\dots$ (βάση 10).

Πρόταση 2.4.3 *Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $x \in (0,1)$. Ο x έχει τερματιζόμενη p-αδική παράσταση αν και μόνο αν είναι της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη.
Αν το x έχει τερματιζόμενη παράσταση τότε

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \dots \frac{k_n}{p^n},$$

δηλαδή $x = \frac{m}{p^n}$ με $m = k_1 p^{n-1} + \dots + k_{n-1}p + k_n \in \mathbb{N}$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $x = \frac{m}{p^n}$. Από τον αλγόριθμο τού Ευκλείδη $m = k_1 p^{n-1} + \dots + k_{n-1}p + k_n$ για κατάλληλους ακεραίους k_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Άρα

$$x = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p^2} + \dots \frac{k_n}{p^n},$$

δηλαδή $x = 0.k_1 \dots k_N$ (βάση p). □

Μπορεί να αποδειχθεί επιπλεόν (βλ. Άσκηση 2.6.31) ότι οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$ έχουν μοναδική τερματιζόμενη p-αδική παράσταση.

Παράδειγμα 2.4.4 Χρησιμοποιώντας τις δεκαδικές παραστάσεις αριθμών μπορούμε να δώσουμε μιά δεύτερη απόδειξη τού Θεωρήματος 1.2.14 (το διάστημα $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο).

Απόδειξη: Το $(0,1)$ δεν είναι πεπερασμένο σύνολο αφού περιέχει όλους τους αριθμούς της μορφής $\frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$. Ας υποθέσουμε ότι το $(0,1)$ είναι αριθμήσιμο. Έστω

$$(0,1) = \{a_1, a_2, \dots\}$$

μιά αρίθμησή του. Έστω

$$a_j = 0.a_{j1}a_{j2}a_{j3}\dots$$

η μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση του a_j, $j = 1, 2, \dots$. Θεωρούμε τον αριθμό $b \in (0,1)$ με μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση

$$b = 0.b_1 b_2 \dots,$$

όπου

$$b_k = \begin{cases} 3, & \text{αν} \quad a_{kk} \neq 3, \\ 5, & \text{αν} \quad a_{kk} = 3. \end{cases}$$

Τότε $b \neq a_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ διότι οι b και a_j διαφέρουν στο k-στο δεκαδικό ψηφίο· εδώ χρησιμοποιείται η μοναδικότητα της μη τερματιζόμενης δεκαδικής παράστασης (Πρόταση 2.4.2). Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο. Άρα το $(0,1)$ είναι υπεραριθμήσιμο. □

2.5 Το σύνολο και η συνάρτηση τού Cantor

Το σύνολο τού Cantor είναι υποσύνολο τού διαστήματος $[0,1]$. Έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες και χρησιμοποιείται συχνά ως αντιπαράδειγμα. Η κατασκευή του γίνεται ως εξής:

Έστω $I_0 = [0,1]$. Αφαιρούμε από το I_0 το διάστημα $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ και θέτουμε

$$I_1 = I_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Αφαιρούμε από τα διαστήματα $[0, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{3}, 1]$ το μεσαίο τους ανοικτό διάστημα και προκύπτει το σύνολο

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία προκύπτει μιά ακολουθία κλειστών συνόλων I_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ τέτοια ώστε
(α) $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$.
(β) Το I_n είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα.

Ορισμός 2.5.1 *Το σύνολο*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

ονομάζεται (τριαδικό) σύνολο τού Cantor.

Παρατήρηση 2.5.2 (α) Το C είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών συνόλων.
(β) Το C δεν είναι το κενό σύνολο διότι $0 \in C$ και $1 \in C$. Μάλιστα το C είναι άπειρο σύνολο. Πραγματικά τα άκρα των διαστημάτων I_n ουδέποτε αφαιρούνται κατά την κατασκευή τού C. Δηλαδή τα σημεία

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots$$

ανήκουν όλα στο C. Ονομάζουμε αυτά τα σημεία *ακραία σημεία τού* C.
(γ) Τα ακραία σημεία τού C είναι σημεία της μορφής $\frac{m}{3^n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Παρατηρούμε ότι, αν εξαιρέσουμε το 0 και το 1, αυτά είναι σημεία τού $(0,1)$ που έχουν δύο τριαδικές παραστάσεις.

Θεώρημα 2.5.3 *Το σύνολο* $[0,1] \backslash C$ *είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων συνολικού μήκους* 1.

Απόδειξη.
Θέτουμε $J_n = I_{n-1} \setminus I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή το J_n είναι το σύνολο πού αφαιρούμε από το I_{n-1} ώστε να προκύψει το I_n. Το J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο, ανοικτών μεσαίων διαστημάτων. Καθένα από αυτά έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Έτσι ισχύει

$$[0,1] \setminus I_n = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n.$$

Άρα

$$\begin{aligned} [0,1] \setminus C &= [0,1] \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus I_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n. \end{aligned}$$

Τα J_n είναι ξένα ανά δύο ανοικτά σύνολα. Κάθε J_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$ το καθένα. Άρα το $[0,1] \backslash C$ είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους, ξένων ανά δύο, ανοικτών διαστημάτων. Το συνολικό μήκος των διαστημάτων αυτών είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3} \, \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

□

Μελετούμε τώρα τις τριαδικές παραστάσεις των στοιχείων τού C. Βρίσκουμε πρώτα τις τριαδικές παραστάσεις των ακραίων σημείων τού $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

$$\begin{aligned} 0 &= 0._3 000 \ldots \\ \frac{1}{3} &= 0._3 1 = 0._3 0222 \ldots \\ \frac{2}{3} &= 0._3 2 = 0._3 1222 \ldots \\ 1 &= 1._3 00 \cdots = 0._3 222 \ldots \end{aligned}$$

Άρα τα ακραία σημεία τού I_1 έχουν μία τουλάχιστον τριαδική παράσταση με ψηφία μόνο 0 και 2 (και όχι 1).

Έστω $x \in [0, \frac{1}{3}]$ και $x = 0.{}_3a_1a_2\ldots$ μιά τριαδική παράσταση τού x. Αν $a_1 = 1$, τότε $x = 0.{}_31a_2a_3\cdots \geq 0.{}_31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Αν $a_1 = 2$, τότε $x = 0.{}_32a_2a_3\cdots > 0.{}_31 = \frac{1}{3}$. Άτοπο. Άρα $a_1 = 0$. Αντιστρόφως: αν $a_1 = 0$, τότε

$$0 \leq x = 0.{}_30a_2a_3\cdots \leq 0.{}_30222\cdots = \frac{1}{3},$$

δηλαδή $x \in [0, \frac{1}{3}]$.

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ αν και μόνο αν για μιά τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $x \in I_1$ αν και μόνο αν για μιά τριαδική παράσταση του x ισχύει $a_1 = 0$ ή $a_1 = 2$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για το δεύτερο ψηφίο a_2 και βρίσκουμε ότι $x \in I_2$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1, 2$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι γενικότερα ισχύει $x \in I_n$ αν και μόνο αν $a_j = 0$ ή $a_j = 2$ για $j = 1, 2, \ldots, n$. Καταλήγουμε επομένως στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4 *Ένας αριθμός $x \in [0,1]$ ανήκει στο σύνολο C αν και μόνο αν $x = 0.{}_3a_1a_2\ldots$ με $a_k \in \{0, 2\},\ k \in \mathbb{N}$.*

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα αυτόν τον χαρακτηρισμό των σημείων του C για να αποδείξουμε ότι το σύνολο τού Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα 2.5.5 *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : C \to [0,1]$ ως εξής: Έστω $x \in C$. Το x έχει μιά τριαδική παράσταση $x = 0.{}_3k_1k_2\ldots$ με $k_j \in \{0, 2\},\ j = 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε

$$f(x) = f(0.{}_3k_1k_2\ldots) = 0.{}_2\frac{k_1}{2}\frac{k_2}{2}\ldots$$

Η f απεικονίζει το C επί τού $[0,1]$. Άρα (βλ. Πρόταση 1.2.3) το $[0,1]$ είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο τού C. Επομένως το C είναι υπεραριθμήσιμο. □

Η συνάρτηση f στην παραπάνω απόδειξη δεν είναι $1-1$. Για παράδειγμα, ισχύει

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(0.{}_30222\ldots) = 0.{}_20111\cdots = 0.{}_21 = \frac{1}{2}.$$

και

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(0.{}_32) = 0.{}_21 = \frac{1}{2}.$$

Γενικότερα η f παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα κάθε μεσαίου ανοικτού διαστήματος που αφαιρείται κατά την κατασκευή τού C. Πράγματι, τα αφαιρούμενα διαστήματα είναι της μορφής

$$(0._3 a_1 a_2 \ldots a_m 1, 0._3 a_1 a_2 \ldots a_m 2),$$

όπου $a_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Επομένως

$$\begin{aligned} f(0._3 a_1 a_2 \ldots a_m 1) &= f(0._3 a_1 a_2 \ldots a_m 0222 \ldots) = 0._2 \frac{a_1}{2} \ldots \frac{a_m}{2} 0111 \ldots \\ &= 0._2 \frac{a_1}{2} \ldots \frac{a_m}{2} 1 \\ &= f(0._3 a_1 a_2 \ldots a_m 2). \end{aligned}$$

Επεκτείνουμε τώρα την f στο $[0,1]$: Έστω $x \in [0,1] \setminus C$. Τότε το x ανήκει σε ένα από τα αφαιρούμενα μεσαία διαστήματα (a, b). Όπως είδαμε $f(a) = f(b)$. Θέτουμε $f(x) := f(a) = f(b)$.

Ορισμός 2.5.6 *Η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται συνάρτηση τού Cantor.*

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση τού Cantor είναι αύξουσα. Στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου αλλά και στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε πολλές ακόμα ιδιότητες τού συνόλου και της συνάρτησης τού Cantor.

2.6 Ασκήσεις

2.6.1 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim a_n = 0$.

2.6.2 Βρείτε το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

2.6.3 Δίνονται δύο συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και ένας αριθμός $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνουν και μάλιστα

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2.6.4 Δείξτε ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

2.6.5 Μιά σειρά έχει μερικά αθροίσματα s_n. Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{s_n\}$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\{|s_n|\}$. Ισχύει το αντίστροφο;

2.6.6 Βρείτε για ποιές τιμές τού x συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές αρχίζοντας με τα κριτήρια τού λόγου και της ρίζας.
(α) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$.

2.6.7 Εξετάστε τη σύγκλιση ή την απόκλιση των σειρών
(α) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$.

2.6.8 Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \sqrt[n]{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

2.6.9 Βρείτε δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ τέτοιες ώστε

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

2.6.10 Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

με τα κριτήρια τού λόγου και της ρίζας.

2.6.11 Δείξτε ότι αν $a_n > 0$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

συγκλίνουν.

2.6.12 Εξετάστε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^2$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\frac{n+1}{n-1}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)$.

2.6.13 Δίνεται ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
(α) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}\, n^{-p}$ συγκλίνει όταν $p > \frac{1}{2}$.
(β) Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι το (α) δεν ισχύει για $p = \frac{1}{2}$.

2.6.14 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ αποκλίνει.

2.6.15 Δίνεται η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Δείξτε ότι αν αυτή συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

2.6.16 Εξετάστε για ποιές τιμές τού a οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απολύτως, συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{a}{n}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\text{(d)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}, \qquad a \neq 0,$$

$$\text{(e)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^a}, \qquad a > 0.$$

2.6.17 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, τότε η σύγκλιση τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
(β) Αν $a_n > 0, b_n > 0$ και $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, τότε η σύγκλιση τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2.6.18 Έστω ότι $a, b > 0$. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n^b}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^b}.$$

2.6.19 Δίνεται φθίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$. Εξετάστε τη σύγκλιση τής σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

2.6.20 Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ και ότι $\lim a_n = 0$. Τότε, από το κριτήριο για τις εναλλάσσουσες σειρές, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

συγκλίνει. Δείξτε επιπλέον ότι, αν s_n είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς και s το άθροισμά της, τότε

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.6.21 Θεωρούμε την ακολουθία

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

(α) Δείξτε ότι $t_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Δείξτε ότι $t_n - t_{n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) Δείξτε ότι η ακολουθία $\{t_n\}$ συγκλίνει. (Το όριό της συμβολίζεται με γ και ονομάζεται *σταθερά τού Euler*).

2.6.22 (συνέχεια της Άσκησης 2.6.21). Έστω h_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
(α) Δείξτε ότι $h_{2n} = s_{2n} - s_n$.
(β) Δείξτε ότι $h_n - \log n \to \gamma$.
(γ) Δείξτε ότι $s_{2n} \to \log 2$.
(δ) Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

2.6.23 (**Κριτήριο συμπύκνωσης τού Cauchy**) Υποθέτουμε ότι $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

συγκλίνει.

2.6.24* Δίνονται δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ θετικών όρων για τις οποίες ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \forall n \geq n_o.$$

Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

2.6.25* (Abel) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιά σειρά θετικών όρων η οποία αποκλίνει. Έστω s_n τα μερικά της αθροίσματα. Δείξτε ότι
(α) Η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$$
αποκλίνει.
(β) Η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$$
συγκλίνει.

2.6.26 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φθίνουσα και $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι οι σειρές
$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$
είτε και οι δύο συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν.

2.6.27 Έστω $f : [1,\infty) \to (0,\infty)$ μιά φθίνουσα συνάρτηση. Θέτουμε
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{και} \quad I_n = \int_1^n f(x)\,dx.$$
Δείξτε ότι η ακολουθία $\{S_n - I_n\}$ είναι φθίνουσα και το όριό της ανήκει στο διάστημα $[0, f(1)]$.

2.6.28 Δείξτε ότι αν μιά σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει απολύτως.

2.6.29 Αναδιατάσσουμε πεπερασμένου πλήθους όρους μιάς σειράς. Εξετάστε τι συμβαίνει με τη σύγκλιση ή την απόκλιση της αναδιάταξης.

2.6.30 Αποδείξτε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 2.3.5: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιά σειρά πού συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως. Αν $-\infty \le s \le t \le +\infty$, τότε υπάρχει αναδιάταξη$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ με μερικά αθροίσματα $\{s'_n\}$ τέτοια ώστε
$$\liminf s'_n = s, \qquad \limsup s'_n = t.$$

2.6.31 Δείξτε ότι οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{p^n}$ έχουν μοναδική τερματιζόμενη p-αδική παράσταση.

2.6.32 Μιά μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση $0.k_1k_2\ldots$ ονομάζεται περιοδική με περίοδο q αν υπάρχουν $q, k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $k_{n+q} = k_n$ για κάθε $n > k$. Έστω $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η μη τερματιζόμενη p-αδική παράσταση του x είναι περιοδική αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

2.6.33 Έστω $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι το x έχει τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση αν και μόνο αν υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοια ώστε ο αριθμός $2^m 5^n x$ να είναι ακέραιος.

2.6.34 Δείξτε ότι το σύνολο των αριθμών τού $(0, 1)$ των οποίων η δεκαδική παράσταση (ή οι δεκαδικές παραστάσεις, αν έχει δύο τέτοιες) δεν περιέχει 7άρια και 3άρια είναι υπεραριθμήσιμο.

2.6.35 Βρείτε το εσωτερικό, το περίβλημα και το σύνορο τού C (στην τοπολογία τού $\mathbb{R}$).

2.6.36 (α) Δείξτε ότι το σύνολο C τού Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα.
(β) Δείξτε ότι το C είναι πουθενά πυκνό. (Ένα σύνολο ονομάζεται πουθενά πυκνό αν $(\overline{C})^o = \varnothing$).

2.6.37 Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση τού Cantor και την Άσκηση 1.6.28 γιά να δείξετε ότι $C \sim [0, 1]$.

2.6.38 Εξετάστε αν ο αριθμός $\frac{1}{4}$ ανήκει στο C. Είναι ακραίο σημείο τού C;

2.6.39 Δείξτε ότι για κάθε $x \in C \setminus \{0\}$ υπάρχει μιά γνησίως μονότονη ακολουθία $\{x_n\} \subset C$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

2.6.40 Δείξτε ότι για το σύνολο C' των σημείων συσσώρευσης τού C ισχύει $C' = C$ (δηλαδή το C είναι *τέλειο* σύνολο).

2.6.41 Μελετήστε τη συνέχεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης χ_C τού C.

2.6.42 Έστω C_1 το σύνολο των ακραίων σημείων τού C. Δείξτε ότι η συνάρτηση τού Cantor είναι γνησίως αύξουσα στο $C \setminus C_1$.

2.6.43 Δείξτε ότι για τη συνάρτηση f τού Cantor ισχύει

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in C, y \leq x\}, \quad x \in [0, 1].$$

2.6.44 Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_α τύπου Cantor ως εξής: Στο πρώτο βήμα αφαιρούμε από το $[0, 1]$ ένα 'μεσαίο' ανοικτό διάστημα μήκους $(1 - \alpha)\, 3^{-1}$. Στο n βήμα αφαιρούμε 2^{n-1} ανοικτά διαστήματα μήκους $(1 - \alpha)\, 3^{-n}$. Δείξτε ότι το C_α είναι ένα τέλειο, υπεραριθμήσιμο σύνολο που δεν περιέχει κάνένα διάστημα.

2.7 Σημειώσεις

Υπάρχει μιά πληθώρα κριτηρίων σύγκλισης και απόκλισης σειρών. Πολλά από αυτά υπάρχουν στο [5, Κεφ. 7] και στο βιβλίο [K.Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*]. Για τη σχετική έννοια τού *απειρογινομένου*, παραπέμπουμε στα [3], [5]. Περισσότερα για αναδιατάξεις σειρών υπάρχουν στα [1] και [5]. Το [5] περιέχει επίσης περισσότερες λεπτομέρειες για τις παραστάσεις αριθμών.

Το σύνολο τού Cantor είναι ένα από τα σημαντικότερα σύνολα στην Πραγματική Ανάλυση. Πρωτοεμφανίστηκε το 1875 σε μιά εργασία τού H.Smith ενώ ο Cantor το μελέτησε λίγο αργότερα, το 1883· βλ. [2, σελ. 35]. Περισσότερα γιά το σύνολο τού Cantor και άλλα σύνολα τού ίδιου τύπου υπάρχουν στα βιβλία [2], [5] και στα άρθρα [W.A.Coppel, *An interesting Cantor set*. Amer. Math. Monthly 90 (1983), 456-460] και [J.F.Randolph, *Distances between points of the Cantor set*. Amer. Math. Monthly 47 (1940), 549-551]. Για τη συνάρτηση τού Cantor παραπέμπουμε στα άρθρα [D.R.Chalice, *A characterization of the Cantor function*. Amer. Math. Monthly 98 (1991), 255-258], [E.Hille and J.D.Tamarkin, *Remarks on a known example of a monotone continuous function*. Amer. Math. Monthly 36 (1929), 255-264], [O.Dovgoshey, O.Martio, M.Vuorinen, *The Cantor function*, Expo. Math. 24 (2006), 1-37].

Κεφάλαιο 3

Διάφορες κλάσεις συναρτήσεων

3.1 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Μιά συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συνεχής στο σημείο $x_o \in A$ αν*
(3.1)
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } (x \in A \text{ και } |x - x_o| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο τού A, τότε η f ονομάζεται συνεχής στο A.

Ορισμός 3.1.2 *Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Μιά συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν*
(3.2)
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } (x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Είναι προφανές ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1.3 Η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \to 0 \quad \text{ενώ} \quad \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 1$) τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε ζεύγος σημείων $x, y \in (0,1)$ (θέτουμε $x = 1/n$, $y = 1/(n+1)$ για αρκετά μεγάλο n) τέτοιο ώστε $|x-y|<\delta$ και $|f(x)-f(y)|=\varepsilon$. Δηλαδή η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεώρημα 3.1.4 *Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο K, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon>0$. Λόγω συνέχειας, για κάθε $x\in K$, υπάρχει $\delta_x>0$ τέτοιο ώστε: αν $y\in K$ και $|y-x|<\delta_x$, τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Ισχύει

$$K\subset\bigcup_{x\in K}\left(x-\frac{\delta_x}{2},x+\frac{\delta_x}{2}\right).$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του $x_1,x_2,\ldots x_m$ τέτοια ώστε

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{m}\left(x_j-\frac{\delta_{x_j}}{2},x+\frac{\delta_{x_j}}{2}\right).$$

Θέτουμε

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1},\delta_{x_2},\ldots,\delta_{x_m}\}.$$

Παίρνουμε τώρα $x,y\in K$ με $|x-y|<\delta$. Τότε $|x-x_j|<\delta_{x_j}/2$ για κάποιο $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Επομένως

$$|y-x_j|\le|x-y|+|x-x_j|<\delta+\frac{\delta_{x_j}}{2}\le\delta_{x_j}.$$

Άρα

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(x_j)|+|f(x_j)-f(y)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

□

Ορισμός 3.1.5 *Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Μιά συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ονομάζεται Lipschitz στο $E\subset A$ αν υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε*

$$\forall x,y\in E,\quad |f(x)-f(y)|\le K\,|x-y|. \tag{3.3}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι αν η f είναι συνάρτηση Lipschitz, για δοθέν $\varepsilon>0$, παίρνουμε $\delta=\varepsilon/K$. Αν $|x-y|<\delta$, τότε, λόγω της (3.3), $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ κι επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχουν όμως ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι Lipschitz.

Παράδειγμα 3.1.6 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$. Αυτό προκύπτει εύκολα από την ανισότητα

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}, \quad x, y \geq 0.$$

Όμως η f δεν είναι συνάρτηση Lipschitz στο $[0, \infty)$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Παίρνουμε $y = 0$. Αν η f ήταν συνάρτηση Lipschitz τότε θα υπήρχε $K > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq K\,|x|$ για κάθε $x \geq 0$, δηλαδή η συνάρτηση $\sqrt{x}/x$ θα ήταν φραγμένη στο $(0, \infty)$. Όμως $\sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x} \to \infty$, όταν $x \to 0+$.

3.2 Μονότονες συναρτήσεις

Ορισμός 3.2.1 Δίνεται συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και σύνολο $A \subset E$. Η f ονομάζεται **αύξουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) \leq f(y)$. Η f ονομάζεται **γνησίως αύξουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) < f(y)$. Η f ονομάζεται **φθίνουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) \geq f(y)$. Η f ονομάζεται **γνησίως φθίνουσα** στο A αν για όλα τα $x, y \in A$ με $x < y$, ισχύει $f(x) > f(y)$. Η f ονομάζεται **μονότονη** στο A αν είναι είτε αύξουσα στο A είτε φθίνουσα στο A. Η f ονομάζεται **γνησίως μονότονη** στο A αν είναι είτε γνησίως αύξουσα στο A είτε γνησίως φθίνουσα στο A.

Θεώρημα 3.2.2 *Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση και αν $c \in (a, b)$, τότε τα πλευρικά όρια $f(c+)$ και $f(c-)$ υπάρχουν και ισχύει $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα· (αλλιώς εργαζόμαστε με την $-f$). Ο αριθμός $f(c)$ είναι άνω φράγμα τού συνόλου $\{f(t) : t \in (a, c)\}$. Θέτουμε $s = \sup\{f(t) : t \in (a, c)\}$ και έχουμε $s \leq f(c)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $x_o \in (a, c)$ τέτοιο ώστε $s - \varepsilon < f(x_o) \leq s$. Αν $x_o < x < c$, λόγω μονοτονίας,

$$s - \varepsilon < f(x_o) \leq f(x) \leq s.$$

Επομένως αν $x_o < x < c$, τότε $|f(x) - s| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{x \to c-} f(x) = s$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$f(c+) = \lim_{x \to c+} f(x) = \inf_{t \in (c, b)} f(t) \geq f(c).$$

$\square$

Θεώρημα 3.2.3 *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη συνάρτηση, τότε η f έχει το πολύ αριθμήσιμου πλήθους σημεία ασυνέχειας. Σε καθένα από αυτά η f έχει ασυνέχεια άλματος.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα· (αλλιώς εργαζόμαστε με την $-f$). Από το Θεώρημα 3.2.2, για κάθε $c \in (a,b)$, τα πλευρικά όρια $f(c-)$ και $f(c+)$ υπάρχουν και ισχύει $f(c_) \leq f(c) \leq f(c+)$. Επομένως αν η f έχει ασυνέχεια στο c, τότε αυτή είναι είτε απαλείψιμη είτε ασυνέχεια άλματος. Η περίπτωση τής απαλείψιμης ασυνέχειας αποκλείεται, διότι αν $f(c-) = f(c+)$ τότε το όριο $\lim_{x \to c} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $f(c)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο c. Άρα η f έχει ασυνέχεια άλματος στο c.

Αν η f έχει ασυνέχεια στα σημεία c, d με $c < d$, τότε τα διαστήματα $(f(c-), f(c+)), (f(d-), f(d+))$ είναι μη κενά και ξένα, άρα το καθένα περιέχει ένα ρητό. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια 1-1 συναρτηση από το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $\mathbb{Q}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι το πολύ αριθμήσιμο. $\square$

Παρατήρηση 3.2.4 Για συναρτήσεις μονότονες σε κλειστό διάστημα (ή και σε γενικότερα σύνολα), θεωρήματα ανάλογα με τα 3.2.2, 3.2.3 αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Πόρισμα 3.2.5 *Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to [c,d]$ είναι μονότονη και επί, τότε η f είναι συνεχής.*

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν η f έχει ασυνέχεια στο σημείο $x_o \in [a,b]$, τότε έχει ασυνέχεια άλματος. Άρα το διάστημα $(f(x_o-), f(x_o+))$ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f αν και είναι υποσύνολο του $[c,d]$. Άτοπο, διότι η f είναι επί. $\square$

Παράδειγμα 3.2.6 Η συνάρτηση τού Cantor είναι αύξουσα στο $[0,1]$ και επί τού $[0,1]$. Άρα είναι συνεχής!

3.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Ορισμός 3.3.1 *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μιά συνάρτηση και*

$$P = \{a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

είναι μιά διαμέριση τού $[a, b]$, η κύμανση της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση P είναι ο αριθμός

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Έστω P μιά διαμέριση τού $[a, b]$ και $Q = P \cup \{x\}$, δηλαδή η Q είναι διαμέριση τού $[a, b]$ που περιέχει ένα σημείο περισσότερο από την P. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_j < x < t_{j+1}$. Ισχύει

$$\begin{aligned} V(f, P) &= \sum_{k \neq j+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \\ &\leq \sum_{k \neq j+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(x) - f(t_j)| + |f(t_{j+1}) - f(x)| \\ &= V(f, Q). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $P \subset Q$, τότε $V(f, P) \leq V(f, Q)$.

Η $P = \{a, b\}$ είναι η μικρότερη διαμέριση του $[a, b]$. Αν Q είναι μιά οποιαδήποτε άλλη, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$|f(b) - f(a)| = V(f, P) \leq V(f, Q). \tag{3.4}$$

Ορισμός 3.3.2 *Η ολική κύμανση της f στο $[a, b]$ είναι ο επεκτεταμένος θετικός αριθμός*

$$V_a^b f = \sup\{V(f, P) : P \text{ διαμέριση τού } [a, b]\}.$$

Αν $V_a^b f < \infty$, η f ονομάζεται συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Το σύνολο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$ συμβολίζεται με $BV[a, b]$.

Παράδειγμα 3.3.3 Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν P διαμέριση του $[a, b]$, τότε

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Άρα $f \in BV[a, b]$ και $V_a^b f = f(b) - f(a)$. Παρομοίως, αν η f είναι φθίνουσα, τότε $V_a^b f = f(a) - f(b)$.

Πρόταση 3.3.4 *Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, τότε η f είναι φραγμένη και*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f.$$

Απόδειξη.
Έστω $x \in [a,b]$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{a,x,b\}$. Τότε

$$|f(x) - f(a)| \leq V(f,P) \leq V_a^b f.$$

Άρα $|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b f$. □

Παράδειγμα 3.3.5 Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ δεν είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης διότι δεν είναι φραγμένη.

Πρόταση 3.3.6 *Δίνονται πραγματικές συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε*
(α) $V_a^b f = 0$ *αν και μόνο αν η f είναι σταθερή.*
(β) $V_a^b(cf) = |c|\, V_a^b f$.
(γ) $V_a^b(f+g) \leq V_a^b f + V_a^b g$.
(δ) $V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty\, V_a^b g + \|g\|_\infty\, V_a^b f$.
(ε) $V_a^b|f| \leq V_a^b f$.
(στ) *Αν $c \in [a,b]$, τότε $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.*

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε τα (γ) και (στ). Τα υπόλοιπα αφήνονται για άσκηση.
Απόδειξη τού (γ): Έστω P διαμέριση τού $[a,b]$. Ισχύει

$$\begin{aligned}
V(f+g,P) &= \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(t_k) - (f+g)(t_{k-1})| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1}) + g(t_k) - g(t_{k-1})| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\
&= V(f,P) + V(g,P) \leq V_a^b f + V_a^b g.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα supremum για όλες τις διαμερίσεις τού $[a,b]$ και προκύπτει το (γ).

Απόδειξη τού (στ): Αν Q διαμέριση τού $[a,c]$ και R διαμέριση τού $[c,d]$, τότε η $P := Q \cup R$ είναι διαμέριση τού $[a,b]$ και ισχύει

$$V(f,Q) + V(f,R) = V(f,P) \leq V_a^b f.$$

Παίρνοντας supremum γιά όλες τις διαμερίσεις Q και R προκύπτει $V_a^c f + V_c^b f \leq V_a^b f$.

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε διαμέριση P τού $[a,b]$. Θέτουμε

$$Q := (P \cup \{c\}) \cap [a,c] \quad \text{και} \quad R := (P \cup \{c\}) \cap [c,b].$$

Η Q είναι διαμέριση του $[a,c]$ και η R είναι διαμέριση του $[c,b]$. Άρα

$$V(f,P) \leq V(f, P \cup \{c\}) = V(f,Q) + V(f,R) \leq V_a^c f + V_c^b f$$

κι επομένως $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$. □

Παράδειγμα 3.3.7 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ για $x \in [-2,1]$. Η f είναι φθίνουσα στο $[-2,0]$ και αύξουσα στο $[0,1]$. Άρα

$$V_{-2}^1 f = V_{-2}^0 f + V_0^1 f = f(-2) - f(0) + f(1) - f(0) = 3$$

και επομένως $f \in BV[-2,1]$.

Η παρακάτω πρόταση είναι πολύ συχνά χρήσιμη για να αποδείξουμε ότι μιά συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης χωρίς όμως να οδηγεί στον υπολογισμό της ολικής κύμανης.

Πρόταση 3.3.8 *Δίνεται συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $f \in BV[a,b]$ και $V_a^b f \leq M(b-a)$.*

Απόδειξη.
Έστω $P = \{t_o = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ μιά διαμέριση τού $[a,b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $k \in \{1,2,\ldots,n\}$,υπάρχει $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ τέτοιο ώστε

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Συνεπώς

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - t_{k-1}) = M(b-a).$$

Άρα $V_a^b f \leq M(b-a)$. □

Παράδειγμα 3.3.9

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1/\pi]. \end{cases}$$

Με χρήση τού ορισμού τής παραγώγου, εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$. Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1/\pi]$ και $\forall x \in (0, 1/\pi]$,

$$|f'(x)| = |2x \sin(1/x) - \cos(1/x)| \leq 2/\pi + 1.$$

Άρα η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[0, 1/\pi]$ κι επόμένως $f \in BV[0, 1/\pi]$.

Παράδειγμα 3.3.10

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Η f είναι αύξουσα στο $[0, 2]$. Άρα $V_0^2 f = f(2) - f(0) = 1$.

Παράδειγμα 3.3.11

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ -x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Η f είναι αύξουσα στο $[0, 1]$ και φθίνουσα στο $[1, 2]$. Άρα

$$V_0^2 f = V_0^1 f + V_1^2 f = f(1) - f(0) + f(1) - f(2) = 4.$$

Παράδειγμα 3.3.12

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x - 2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Κοιτώντας τη γραφική παράσταση τής f μαντεύουμε ότι $V_0^2 f = 4$. Θα δείξουμε ότι η εικασία αυτή είναι αληθής. Έστω $0 < \varepsilon < 1/2$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_\varepsilon = \{0, 1, 1 + \varepsilon, 2\}$ τού $[0, 2]$. Ισχύει

$$V_0^2 f \geq V(f, P_\varepsilon) = |f(1) - f(0)| + |f(1+\varepsilon) - f(1)| + |f(2) - f(1+\varepsilon)| = 4 - 2\varepsilon.$$

Παίρνουμε όριο για $\varepsilon \to 0$ και προκύπτει $V_0^2 f \geq 4$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $P = \{t_0 < t_1 < \ldots t_n\}$ τού $[0,2]$. Υπάρχει μοναδικό $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ έτσι ώστε $t_m \leq 1 < t_{m+1}$. Παρατηρούμε ότι $0 < t_m \leq 1$ και $1 < t_{m+1} \leq 2$. Θέτουμε $P_1 = \{0, t_1, \ldots, t_m\}$ και $P_2 = \{t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots, 2\}$. Η P_1 είναι διαμέριση τού $[0, t_m]$. Άρα

$$V(f, P_1) \leq V_0^{t_m} f = f(t_m) - 0 = t_m.$$

Η P_2 είναι διαμέριση τού $[t_{m+1}, 2]$. Άρα

$$V(f, P_2) \leq V_{t_{m+1}}^2 f = f(2) - f(t_{m+1}) = 2 - t_{m+1}.$$

Τελικά λοιπόν

$$\begin{aligned} V(f,P) &= V(f,P_1) + |f(t_{m+1}) - f(t_m)| + V(f,P_2) \\ &\leq t_m + t_m + 2 - t_{m+1} + 2 - t_{m+1} = 2t_m + 4 - 2t_{m+1} \leq 2 + 4 - 2 = 4. \end{aligned}$$

Επειδή η P είναι τυχαία διαμέριση τού $[0,2]$, ισχύει $V_0^2 f \leq 4$. Άρα $V_0^2 f = 4$.

Ορισμός 3.3.13 *Αν $f \in BV[a,b]$, η* **συνάρτηση ολικής κύμανσης** *τής f είναι η*

$$v_f(x) = V_a^x f, \quad x \in [a,b],$$

με τη σύμβαση $V_a^a f = 0$.

Παράδειγμα 3.3.14 Θα βρούμε τη συνάρτηση ολικής κύμανσης της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Έστω $x \in [-\pi, 0]$. Τότε

$$V_{-\pi}^x f = f(x) - f(-\pi) = \cos x + 1.$$

Για $x \in [0, \pi]$,

$$V_{-\pi}^x f = V_{-\pi}^0 f + V_0^x f = f(0) - f(-\pi) + f(0) - f(x) = 3 - \cos x.$$

Άρα η συνάρτηση ολικής κύμανσης είναι η

$$v_f(x) = \begin{cases} \cos x + 1, & x \in [-\pi, 0], \\ 3 - \cos x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Θεώρημα 3.3.15 *Έστω $f \in BV[a,b]$ με συνάρτηση ολικής κύμανσης v_f. Οι συναρτήσεις v_f και $v_f - f$ είναι αύξουσες.*

Απόδειξη.
Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Από την Πρόταση 3.3.6(στ),

$$v_f(y) - v_f(x) = V_a^y f - V_a^x f = V_x^y f \geq |f(y) - f(x)| \geq 0.$$

Άρα η v_f είναι αύξουσα. Η παραπάνω ανισότητα δίνει επίσης

$$v_f(y) - v_f(x) \geq f(y) - f(x),$$

δηλαδή $v_f(y) - f(y) \geq v_f(x) - f(x)$. Άρα και η $v_f - f$ είναι αύξουσα. □

Πόρισμα 3.3.16 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μιά συνάρτηση. Τότε $f \in BV[a, b]$ αν και μόνο αν η f είναι διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

Απόδειξη.
Αν $f \in BV[a, b]$, τότε $f = v_f - (v_f - f)$ και λόγω τού Θεωρήματος 3.3.15 οι συναρτήσεις v_f και $v_f - f$ είναι αύξουσες.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 αύξουσες συναρτήσεις. Τότε $f_1, f_2 \in BV[a, b]$ (βλ. Παράδειγμα 3.3.3). Άρα $f \in BV[a, b]$ λόγω της Πρότασης 3.3.6(γ). □

Από τα Θεωρήματα 3.2.2, 3.2.3 (βλ. και Παρατήρηση 3.2.4) προκύπτει το ακόλουθο:

Πόρισμα 3.3.17 *Κάθε συνάρτηση f φραγμένης κύμανσης έχει το πολύ αριθμήσιμου πλήθους ασυνέχειες. Κάθε ασυνέχεια τής f είναι είτε απαλείψιμη είτε ασυνέχεια άλματος.*

Παράδειγμα 3.3.18 Στο Παράδειγμα 3.3.5 είδαμε μιά συνάρτηση στο $[0, 1]$ η οποία δεν είναι φραγμένης κύμανσης επειδή δεν είναι φραγμένη. Θα δούμε τώρα μιά φραγμένη συνάρτηση που δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής: είναι συνεχής, ικανοποιεί τις ισότητες $f(0) = 0$, $f(1/n) = (-1)^n/n$ για $n \in \mathbb{N}$, και σε καθένα από τα διαστήματα $[1/(n+1), 1/n]$ η γραφική της παράσταση είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Θεωρούμε την ακολουθία των διαμερίσεων

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right\}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} V(f, P_n) &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \right| \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε όρια για $n \to \infty$ και συμπεραίνουμε ότι $V_0^1 f = \infty$, δηλαδή $f \notin BV[0,1]$.

Παράδειγμα 3.3.19 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω P μιά οποιαδήποτε διαμέριση τού $[0,1]$ που περιέχει τα σημεία $t_k = 2/[(2k+1)\pi]$ για $k = 0, \ldots, n$. Ισχύει

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| = t_k + t_{k-1} \geq 2t_k = \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Συνεπώς

$$V(f,P) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \to \infty, \ \text{ όταν } \quad n \to \infty.$$

Άρα $f \notin BV[0,1]$.

Οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης σχετίζονται άμεσα με την έννοια τού μήκους καμπύλης. Μιά **επίπεδη καμπύλη**, δηλαδή μιά συνεχής συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ορίζει δύο συναρτήσεις $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, όπου

$$F(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a,b].$$

Οι x, y είναι οι **συνιστώσες συναρτήσεις** της F. Θα δούμε ότι μια επίπεδη καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος αν και μόνο αν οι συναρτήσεις x, y έχουν φραγμένη κύμανση.

Ορισμός 3.3.20 *Δίνεται μιά επίπεδη καμπύλη $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με συνιστώσες συναρτήσεις x, y. Αν $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ είναι μιά διαμέριση τού $[a,b]$ ορίζουμε*

$$L(F,P) = \sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Το **μήκος της καμπύλης** *είναι ο επεκτεταμένος αριθμός*

$$L(F) := \sup\{L(F,P) : P \quad \textit{διαμέριση} \quad \textit{του} \quad [a,b]\}.$$

Η καμπύλη ονομάζεται **ευθυγραμμίσιμη** *αν έχει πεπερασμένο μήκος.*

Θεώρημα 3.3.21 *Δίνεται μιά επίπεδη καμπύλη $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Η F είναι ευθυγραμμίσιμη αν και μόνο αν οι συνιστώσες συναρτήσεις x και y είναι φραγμένης κύμανσης.*

Απόδειξη.
Έστω $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ μιά διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ισχύει

$$\begin{aligned} |x(t_k) - x(t_{k-1})| &\leq \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &\leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} |y(t_k) - y(t_{k-1})| &\leq \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &\leq |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |y(t_k) - y(t_{k-1})| \end{aligned}$$

Άρα

$$V(x, P) \leq L(F, P) \leq V(x, P) + V(y, P) \tag{3.5}$$
$$V(y, P) \leq L(F, P) \leq V(x, P) + V(y, P). \tag{3.6}$$

Από τις (3.5) και (3.6) προκύπτει ότι $x, y \in BV[a, b]$ αν και μόνο αν η F είναι ευθυγραμμίσιμη. □

3.4 ∗ Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 3.4.1 *Μιά συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα μέσα στο $[a, b]$ και*

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta, \qquad \textit{τότε} \qquad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Συμβολίζουμε το σύνολο των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ με $AC[a, b]$.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα (θέτοντας $n = 1$) ότι κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επίσης εύκολα φαίνεται ότι, αν στον ορισμό θεωρήσουμε αριθμήσιμο (και όχι πεπερασμένο) πλήθος υποδιαστημάτων τού $[a, b]$, προκύπτει η ίδια κλάση συναρτήσεων.

Πρόταση 3.4.2 *Κάθε συνάρτηση Lipschitz στο $[a,b]$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη.
Έστω f συνάρτηση Lipschitz στο $[a,b]$ με σταθερά K. Θεωρούμε ξένα υποδιαστήματα (a_1,b_1), $(a_2,b_2),\ldots,$ (a_n,b_n) τού $[a,b]$. Τότε

$$\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|\leq\sum_{j=1}^{n}K\,(b_j-a_j).$$

Επομένως, για δοθέν $\varepsilon>0$, αν $\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)<\delta=\varepsilon/K$, τότε $\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon$. Άρα η f είναι απόλυτα συνεχής στο $[a,b]$. $\square$

Πρόταση 3.4.3 *Αν $f,g\in AC[a,b]$, τότε $f+g\in AC[a,b]$, $f-g\in AC[a,b]$, $fg\in AC[a,b]$, $|f|\in AC[a,b]$, $cf\in AC[a,b]$ ($c\in\mathbb{R}$). Αν επιπλέον $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε $f/g\in AC[a,b]$.*

Απόδειξη.
Θα αποδείξουμε μόνο τόν τελευταίο ισχυρισμό, οι υπόλοιποι αφήνονται για άσκηση. Η $|f|$ ως συνεχής στο $[a,b]$ έχει μέγιστο $M_f\geq 0$ και παρομοίως η $|g|$ έχει μέγιστο M_g στο $[a,b]$. Η $|g|$ ως συνεχής και πουθενά μηδενική στο $[a,b]$ έχει ελάχιστο $m>0$.

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή οι f,g είναι απόλυτα συνεχείς, για αυτό το ε υπάρχουν κατάλληλα δ_f και δ_g σύμφωνα με τον ορισμό 3.4.1. Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_f,\delta_g\}$. Θεωρούμε ξένα ανά δύο διαστήματα (a_1,b_1), $(a_2,b_2),\ldots,$ (a_n,b_n) μέσα στο $[a,b]$ με

$$\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)<\delta.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{f(b_j)}{g(b_j)}-\frac{f(a_j)}{g(a_j)}\right|\\
=\;&\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{f(b_j)g(a_j)-g(a_j)f(a_j)+g(a_j)f(a_j)-f(a_j)g(b_j)|}{g(b_j)g(a_j)}\right|\\
\leq\;&\sum_{j=1}^{n}\frac{|g(a_j)|\,|f(b_j)-f(a_j)|+|f(a_j)|\,|g(b_j)-g(a_j)|}{|g(b_j)g(a_j)|}\\
\leq\;&\frac{M_g\varepsilon+M_f\varepsilon}{m^2}.
\end{aligned}$$

Επομένως η $\frac{f}{g}$ είναι απόλυτα συνεχής. $\square$

Θεώρημα 3.4.4 *Κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης.*

Απόδειξη.
Έστω f μιά απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$. Για $\varepsilon = 1$ διαλέγουμε $\delta > 0$ σύμφωνα με τον ορισμό 3.4.1.

Έστω $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ μιά διαμέριση τού $[a,b]$ με $t_j - t_{j-1} < \delta$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$. Θα δείξουμε ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{j-1}, t_j]$. Θεωρούμε τυχαία διαμέριση

$$P_j = \{t_{j-1} = \tau_0^j < \tau_1^j < \cdots < \tau_{m_j}^j = t_j\}$$

τού διαστήματος $[t_{j-1}, t_j]$. Τα διαστήματα της P_j, ως υποσύνολα των διαστημάτων της P έχουν όλα μήκος μικρότερο τού δ. Άρα

$$V(f, P_j) = \sum_{i=1}^{m_j} |f(\tau_i^j) - f(\tau_{i-1}^j)| < 1.$$

Άρα $f \in BV[t_{j-1}, t_j]$ και μάλιστα $V_{t_{j-1}}^{t_j} f \leq 1$. Λόγω της Πρότασης 3.3.6(στ) έχουμε $f \in BV[a,b]$ και μάλιστα

$$V_a^b f = V_a^{t_1} f + V_{t_1}^{t_2} f + \cdots + V_{t_{m-1}}^b f \leq m.$$

□

3.5 ∗ Κυρτές συναρτήσεις

Ορισμός 3.5.1 *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Μιά συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **κυρτή** *αν για κάθε ζεύγος σημείων $a, b \in I$ και κάθε $t \in [0,1]$, ισχύει*

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b). \tag{3.7}$$

Μιά συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **κοίλη** *αν η $-f$ είναι κυρτή.*

Παρατήρηση 3.5.2 Γράφοντας $x = (1-t)a + tb$, βλέπουμε ότι η ανισότητα (3.7) είναι ισοδύναμη με την

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a), \tag{3.8}$$

για κάθε ζεύγος σημείων $a, b \in I$ και κάθε x μεταξύ a και b.

Η ευθεία που περνά από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχει εξίσωση

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Άρα η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος σημείων $a, b \in I$, $a < b$, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι πάνω από το γράφημα της f στο $[a, b]$.

Μιά άλλη συνέπεια της (3.8) είναι η ανισότητα

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \tag{3.9}$$

για f κυρτή στο I, $a, b \in I$, $a < b$, και $x \in [a, b]$.

Παράδειγμα 3.5.3 (α) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $a < b$ και $x \in [a, b]$, τότε η (3.8) είναι ισοδύναμη με την

$$x^2 - (b + a)x + ab \leq 0$$

η οποία είναι αληθής.
(β) Η συνάρτηση $g(x) = |x|$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$· η (3.7) επαληθεύται εύκολα:

$$g((1 - t)a + tb) = |(1 - t)a + tb| \leq (1 - t)|a| + t|b| = (1 - t)g(a) + tg(b).$$

(γ) Μιά συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής $\phi(x) = ax + b$, όπου a, b είναι πραγματικές σταθερές ονομάζεται **αφινική**. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι κάθε αφινική συνάρτηση ικανοποιεί την (3.7) με ισότητα. Άρα κάθε αφινική συνάρτηση είναι και κυρτή και κοίλη.

Λήμμα 3.5.4 *Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο διάστημα I. Αν $a, b, c \in I$ και $a < b < c$, τότε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}. \tag{3.10}$$

Απόδειξη.
Από την προφανή ισότητα

$$b = \frac{c - b}{c - a}a + \frac{b - a}{c - a}c$$

και την (3.8) προκύπτει η ανισότητα

$$f(b) \leq \frac{c - b}{c - a}f(a) + \frac{b - a}{c - a}f(c) \tag{3.11}$$

από την οποία προκύπτουν εύκολα και οι δύο ανισότητες (3.10). □

Θυμίζουμε τώρα τους ορισμούς της αριστερής και της δεξιάς παραγώγου μιάς συνάρτησης.

Ορισμός 3.5.5 *Έστω I ανοικτό διάστημα. Θεωρούμε συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ και σημείο $x \in I$. Λέμε ότι η f έχει αριστερή παράγωγο στο x αν το όριο*

$$f'_-(x) := \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός).

Λέμε ότι η f έχει δεξιά παράγωγο στο x αν το όριο

$$f'_+(x) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός).

Θεώρημα 3.5.6 *Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο ανοικτό διάστημα I. Ισχύουν τα ακόλουθα:*
(α) Η f έχει δεξιά και αριστερή παράγωγο σε κάθε $x \in I$.
(β) Οι f'_+ και f'_- είναι αύξουσες συναρτήσεις στο I.
(γ) $f'_- \leq f'_+$ στο I.
(δ) Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα εκτός από το πολύ αριθμησίμου πλήθους σημεία τού I.
(ε) Αν $[a, b] \subset I$, η f είναι συνάρτηση Lipschitz στο $[a, b]$. Επιπλέον, αν $M := \max\{|f'_+(a)|, |f'_-(b)|\}$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq M\, |x - y|,$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$.
(στ) Η f είναι συνεχής στο I.

Απόδειξη.
Σταθεροποιούμε $x \in I$. Από το Λήμμα 3.5.4, η συνάρτηση

$$\phi(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

είναι φθίνουσα σε μια περιοχή τού 0 (εκτός από το σημείο 0). Άρα

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \phi(h) \leq \lim_{h\to 0+} \phi(h) = f'_+(x). \tag{3.12}$$

Επομένως τα (α) και (γ) αποδείχθηκαν.

Θεωρούμε σημεία $a < b$ στο I. Από το Λήμμα 3.5.4 προκύπτει ότι

$$f'_+(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \lim_{c\to b+} \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'_+(b).$$

Άρα η f'_+ είναι αύξουσα. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι και η f'_- είναι αύξουσα. Έτσι αποδείχθηκε και το (β).

Από το Λήμμα 3.5.4 προκύπτει επίσης ότι αν $a < c$, τότε $f'_+(a) \leq f'_-(c)$. Έστω τώρα ένα σημείο $a \in I$ στο οποίο η αύξουσα συνάρτηση f'_- είναι συνεχής. Τότε

$$f'_-(a) \leq f'_+(a) \leq \lim_{c \to a+} f'_-(c) = f'_-(a).$$

Επομένως $f'_-(a) = f'_+(a)$, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Επειδή η αύξουσα συνάρτηση f'_- έχει το πολύ αριθμησίμου πλήθους σημεία ασυνέχειας, συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη μόνο σε πεπερασμένου ή αριθμησίμου πλήθους σημεία τού I. Έτσι αποδείχθηκε και το (δ).

Θεωρούμε τώρα κλειστό διάστημα $[a, b] \subset I$ και σημεία $a \leq x < y \leq b$. Τότε

$$-M \leq f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b) \leq M$$

και η (ε) προκύπτει άμεσα. Τέλος η (στ) είναι προφανής συνέπεια της (ε). □

Έχοντας στο μυαλό μας τη γεωμετρική ερμηνεία της κυρτότητας (βλ. Παρατήρηση 3.5.2), είναι εύλογο να εικάσουμε ότι το γράφημα μιάς κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία του. Βέβαια μιά κυρτή συνάρτηση δεν είναι παντού παραγωγίσιμη και επομένως το γράφημά της δεν έχει εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο του. Όμως, χάρη στο Θεώρημα 3.5.6, η f έχει πλευρικές παραγώγους και μάλιστα $f'_- \leq f'_+$. Έτσι σε ένα σημείο c στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη μπορούμε να θεωρήσουμε ευθείες κλίσης $\lambda \in [f'_-(c), f'_+(c)]$. Το παρακάτω θεώρημα εγγυάται ότι όλες αυτές οι ευθείες είναι κάτω από το γράφημα της f.

Θεώρημα 3.5.7 *Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο ανοικτό διάστημα I. Έστω $c \in I$. Έστω $\lambda \in [f'_-(c), f'_+(c)]$. Τότε για κάθε $x \in I$,*

$$f(x) \geq \lambda(x - c) + f(c). \tag{3.13}$$

Απόδειξη.
Από το Λήμμα 3.5.4 προκύπτει ότι για $x > c$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'_+(c) \geq \lambda$$

και για $x < c$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'_-(c) \leq \lambda.$$

Η (3.13) είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω ανισοτήτων. □

Θεώρημα 3.5.8 (Ανισότητα Jensen) *Δίνεται κυρτή συνάρτηση f στο ανοικτό διάστημα I. Υποθέτουμε ότι τα σημεία $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ανήκουν στο I και αριθμοί $p_1, p_2, \ldots, p_n \in (0, \infty)$ ικανοποιούν την ισότητα*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Τότε

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j). \tag{3.14}$$

Η ισότητα ισχύει στην (3.14) *αν και μόνο αν η f είναι αφινική στο διάστημα* $[x_1, x_n]$.

Απόδειξη.
Θέτουμε

$$c = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $c \in [x_1, x_n]$· άρα $c \in I$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.5.7 για $x = x_j$ και προκύπτει

$$f(x_j) \geq \lambda(x_j - c) + f(c), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριστερό και δεξί μέλος της ανισότητας αυτής με p_j και στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη. Προκύπτει η (3.14).

Έστω ότι η f είναι αφινική στο $[x_1, x_n]$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η (3.14) ισχύει με ισότητα. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ισότητα στην (3.14). Τότε η (3.15) ισχύει με ισότητα για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, αν θέσουμε $\phi(x) = \lambda(x-c)+f(c)$, ισχύει $f(x_j) = \phi(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$. Εφαρμόζοντας τώρα την (3.8), βρίσκουμε ότι $f(x) \leq \phi(x), \quad \forall x \in [x_1, x_n]$. Από την άλλη μεριά, από το Θεώρημα 3.5.7 προκύπτει ότι $f(x) \geq \phi(x), \quad \forall x \in [x_1, x_n]$. Άρα $f = \phi$, δηλαδή η f είναι αφινική στο $[x_1, x_n]$. □

Θεώρημα 3.5.9 (Ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα Riemann) *Έστω f μιά συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$. Αν $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ και η ϕ είναι συνεχής και κυρτή στο $[m, M]$, τότε*

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (\phi \circ f). \tag{3.16}$$

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 3.5.8,

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\,f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\,\phi\left(f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

παρατηρούμε ότι τα παραπάνω είναι αθροίσματα Riemann. Παίρνουμε όρια για $n\to\infty$ και προκύπτει η (3.16). □

Θεώρημα 3.5.10 *Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα στο I.*

Απόδειξη.
Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε, λόγω τού Θεωρήματος 3.5.6(β), η f' είναι αύξουσα στο I.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η f' είναι αύξουσα στο I. Έστω ότι η f δεν είναι κυρτή στο I. Τότε, λόγω τής (3.8), υπάρχει τριάδα σημείων $a<x<b$ στο I τέτοια ώστε

$$f(x)>\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

Άπό το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν σημεία $\xi\in(a,x)$ και $\eta\in(x,b)$ τέτοια ώστε $f'(\xi)>f'(\eta)$. Άτοπο, διότι η f' είναι αύξουσα. □

Πόρισμα 3.5.11 *Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η $f''(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$.*

3.6 Ασκήσεις

Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

3.6.1 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0,1)$.
(α) $f(x)=e^x$, (β) $f(x)=e^{1/x}$, (γ) $f(x)=e^{-1/x}$, (δ) $f(x)=\log x$.

3.6.2 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0,\infty)$.
(α) $f(x)=e^x$, (β) $f(x)=x\sin x$, (γ) $f(x)=\sin(x^2)$, (δ) $f(x)=\sin^2 x$.

3.6.3 Υποθέτουμε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι τα όρια $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ υπάρχουν ($\in\mathbb{R}$). Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3.6.4 Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f έχει φραγμένη παράγωγο, αν και μόνο αν είναι συνάρτηση Lipschitz στο (a,b).

3.6.5 Αν οι f,g είναι Lipschitz στο $[a,b]$, δείξτε ότι και οι $f+g$, $f-g$, fg είναι Lipschitz στο $[a,b]$. Αν επιπλέον $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε και η $1/f$ είναι Lipschitz στο $[a,b]$.

3.6.6 Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.7 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0,1)$.
(α) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, (β) $f(x)=\cot x$.

3.6.8 Εξετάστε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0,\infty)$.
(α) $f(x)=\sqrt{x}$, (β) $f(x)=\sin\sqrt{x}$, (γ) $f(x)=\sin(\sin x)$.

3.6.9 Έστω $E\subset\mathbb{R}$ ένα σύνολο που είναι φραγμένο αλλά όχι συμπαγές. Βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:E\to\mathbb{R}$ που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.10 Βρείτε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.11 Δίνεται μιά ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι Cauchy, δείξτε ότι και η ακολουθία $\{f(a_n)\}$ είναι Cauchy.

3.6.12 Σωστό ή Λάθος;
(α) Το άθροισμα δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
(β) Το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

3.6.13 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,2)$ και στο $(1,3)$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,3)$.
(β) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[k,k+1]$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.
(γ) Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(a,b]$ και στο $[b,c)$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,c).
(δ) Αν A,B είναι κλειστά υποσύνολα τού $\mathbb{R}$ και η $f:A\cup B\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και στο B, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A\cup B$.

3.6.14 Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0+} f(x)$ υπάρχει και ότι η f είναι φραγμένη στο $(0,1)$.

3.6.15* Δίνονται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και σημείο $a\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{a\}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο a αν και μόνο αν η F είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα σύνολο της μορφής $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\}$, όπου $\varepsilon>0$.

3.6.16 Δείξτε ότι αν η $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πεπερασμένος αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,\infty)$.

3.6.17 Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις
(α) $f(x)=\arctan x$ στο $\mathbb{R}$.
(β) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ στο $(0,\infty)$.
(γ) $f(x)=e^{-1/x}$ στο $(0,\infty)$.

3.6.18 Σωστό ή Λάθος;
Υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένη.

3.6.19 Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,\infty)$. Υπάρχουν πάντα τα όρια $\lim_{x\to 0+} f(x)$ και $\lim_{x\to\infty} f(x)$;

3.6.20 Δίνεται ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν για κάθε $x\geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x+n)=0$, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

3.6.21 Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο A αν και μόνο αν για οποιεσδήποτε δυό ακολουθίες $\{x_n\},\{y_n\}$ τού A,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0 \implies \lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0.$$

3.6.22 Μιά συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση Lipschitz τάξης α, όπου $\alpha>0$, αν υπάρχει $K>0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leq K\,|x-y|^\alpha,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(α) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz τάξης α, όπου $\alpha>1$, είναι σταθερή.
(β) Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση Lipschitz τάξης α, όπου $\alpha\leq 1$, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.23 Δείξτε ότι η συνάρτηση x^α είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,\infty)$ αν και μόνο αν $0\leq\alpha\leq 1$.
Υπόδειξη: Αν $0<\alpha\leq 1$, η x^α είναι Lipschitz τάξης α. Ειδάλλως, αν για παράδειγμα $\alpha=2$, τότε χρησιμοποιήστε τη σύγκλιση $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

3.6.24 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι τα πλευρικά όρια $f(0+)$ και $f(1-)$ υπάρχουν. Ορίζουμε συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ θέτοντας $F = f$ στο $(0,1)$, $F(0) = f(0+)$ και $F(1) = f(1-)$. Δείξτε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.25* Δίνεται ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, όπου E πυκνό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ομοιόμορφα συνεχής επέκταση της f στο $\mathbb{R}$.

3.6.26 Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας επεκτείνεται και σε μετρικούς χώρους. Δίνονται δύο μετρικοί χώροι (X,d) και (Y,ρ). Μιά συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται ομοιόμορφα συνεχής αν

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \ (x_1, x_2 \in X \ \text{ και } \ d(x_1,x_2) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Αν η $g : X \to Y$ είναι συνεχής και ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος, δείξτε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.6.27 Δίνεται η συνάρτηση $f : l^2 \to l^1$, με $f(\{x_n\}) = \{x_n/n\}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Η άσκηση προϋποθέτει γνώση των χώρων l^1 και l^2. Βλ. [2], [5])

Μονότονες συναρτήσεις

3.6.28 Δίνονται συναρτήσεις f και g που είναι αύξουσες στο E.
(α) Δείξτε ότι η $f + g$ είναι αύξουσα.
(β) Αν μιά από τις f και g είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα.
(γ) Αν $f, g \geq 0$, τότε η fg είναι αύξουσα.
(δ) Αν $f, g \leq 0$, τότε η fg είναι φθίνουσα.
(ε) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in E$ και η f έχει σταθερό πρόσημο στο E, τότε η $1/f$ είναι φθίνουσα στο E.

3.6.29 Βρείτε αύξουσες συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε η fg να είναι φθίνουσα.

3.6.30 Δίνονται μονότονη συνάρτηση f στο E και μονότονη συνάρτηση g στο A με $f(E) \subset A$.
(α) Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι αύξουσα.
(β) Αν οι f, g έχουν αντίθετα είδη μονοτονίας, δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι φθίνουσα.

3.6.31 Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.

3.6.32 Σωστό ή Λάθος;
Αν μιά συνάρτηση είναι αμφιμονότιμη, τότε είναι γνησίως μονότονη.

3.6.33 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και αμφιμονότιμη σε ένα διάστημα I, τότε είναι γνησίως μονότονη στο I.

3.6.34 Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I, τότε η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(I)$.

3.6.35 Δίνονται συναρτήσεις f αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f = g$.

3.6.36 Σωστό ή Λάθος;
Αν η f είναι αύξουσα στο $[a, c)$ και αύξουσα στο $[c, b]$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

3.6.37 Δείξτε ότι κάθε φραγμένη, συνεχής, και μονότονη συνάρτηση σε ένα ανοικτό διαστημα I είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

3.6.38 Δείξτε ότι αν $f \in BV[a, b]$ και υπάρχει $m > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq m$, $\forall x \in [a, b]$, τότε $1/f \in BV[a, b]$.

3.6.39 Αποδείξτε τα (α), (β), (δ), (ε) της Πρότασης 3.3.6.

3.6.40 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι φραγμένης κύμανσης και βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση ολικής κύμανσης.
(α) $f_1(x) = x^2, \ \ x \in [-2, 5]$.
(β) $f_2(x) = \cos x, \ \ x \in [-\pi, 2\pi]$.
(γ) $f_3(x) = \sin^2 x, \ \ x \in [0, \pi]$.

3.6.41 Δείξτε ότι αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, τότε $f \in BV[a, b]$ και

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| \, dt.$$

3.6.42 Δείξτε ότι $V_a^b(\chi_{\mathbb{Q}}) = +\infty$.

3.6.43 Δείξτε ότι $f \in BV[a, b]$ αν και μόνο αν υπάρχει αύξουσα συνάρτηση F στο $[a, b]$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq F(x) - F(y)$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $x > y$.

3.6.44 Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι φραγμένης κύμανσης και βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση ολικής κύμανσης.
(α) $f_1(x) = |\log x|, x \in [1/e, 2e]$.
(β) $f_2(x) = e^x - x, \quad x \in [0, 4]$.

3.6.45 Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ -3, & x = 1 \\ x - 2, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

Βρείτε τον αριθμό $V_0^2 f$.

3.6.46 Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-\beta}), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι:
(α) Η f είναι φραγμένη αν και μόνο αν $\alpha \geq 0$.
(β) Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν $\alpha > 0$.
(γ) Η $f'(0)$ υπάρχει αν και μόνο αν $\alpha > 1$.
(δ) Η f' είναι φραγμένη αν και μόνο αν $\alpha \geq 1 + \beta$.
(ε) Αν $\alpha > 0$, τότε $f \in BV[0,1]$ για $0 < \beta < \alpha$ και $f \notin BV[0,1]$ για $\beta \geq \alpha$.

3.6.47 Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{αν} \quad x \in [0, \pi), \\ \sin x, & \text{αν} \quad x \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

δείξτε ότι $f \in BV[0, 2\pi]$.

3.6.48 Δείξτε ότι αν $f, g \in BV[a,b]$ και $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, τότε $h \in BV[a,b]$.

3.6.49 Δίνεται συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν $V_a^b f = f(b) - f(a)$.

3.6.50 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ για την οποία υπάρχουν σημεία $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ τέτοια ώστε η f είναι παραγωγίσιμη και μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{j-1}, t_j]$. Δείξτε ότι $f \in BV[a,b]$ και

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| \, dt.$$

3.6.51 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν $|f| \leq |g|$ στο $[a, b]$, τότε $V_a^b f \leq V_a^b g$.
(β) Αν η $g \in BV[0, 1]$ είναι αμφιμονότιμη, τότε είναι γνησίως μονότονη.
(γ) Υπάρχει συνάρτηση που είναι αύξουσα και μη φραγμένη στο $[0, 1]$.

3.6.52 Δείξτε ότι η
$$\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_a^b f$$
είναι νόρμα στο χώρο $BV[a, b]$.

3.6.53 Σωστό ή Λάθος;
(α) Αν για μιά φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $V_{a+\varepsilon}^b f \leq M$, $\forall \varepsilon > 0$, τότε $V_a^b f \leq M$.
(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f \in BV[a+\varepsilon, b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $f \in BV[a, b]$.

3.6.54 Βρείτε μιά μη θετική συνάρτηση $f \in BV[0, 1]$ με $V_0^1 f = V_0^1 |f|$ και μιά συνάρτηση $g \in BV[0, 1]$ με $V_0^1 |g| < V_0^1 g$.

3.6.55 Δίνονται αριθμός $p \in [1, \infty)$ και συνάρτηση $f \in BV[a, b]$. Δείξτε ότι $|f|^p \in BV[a, b]$.

3.6.56 Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $|f| \in BV[a, b]$, τότε $f \in BV[a, b]$.

3.6.57 Μιά συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **τμηματικά μονότονη** αν υπάρχει διαμέριση $\{a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ τού $[a, b]$ τέτοια ώστε η f είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
Δείξτε κάθε τμηματικά μονότονη συνάρτηση, είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Βρείτε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης που δεν είναι τμηματικά μονότονη.

3.6.58 Έστω ότι $a < c < b$. Δίνεται συνάρτηση f φθίνουσα στο $[a, c)$ και φθίνουσα στο $[c, b]$. Δείξτε ότι
$$V_a^b f = f(a) - f(c+) + |f(c) - f(c-)| + f(c) - f(b).$$

Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

3.6.59 Έστω
$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-\beta}), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Δείξτε ότι:
(α) Αν $0 < \beta < \alpha$, τότε η f είναι απόλυτα συνεχής στο $[0, 1]$.
(β) Αν $0 < \alpha \leq \beta$, τότε η f δεν είναι απόλυτα συνεχής στο $[0, 1]$.

3.6.60 Σωστό ή Λάθος;
(α) Κάθε συνάρτηση στο $[a, b]$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φθινουσών συναρτήσεων στο $[a, b]$.
(β) Κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο φθινουσών συναρτήσεων στο $[a, b]$.

3.6.61 Βρείτε μιά συνάρτηση στο $[0, 1]$ που είναι φραγμένης κύμανσης αλλά δεν είναι απόλυτα συνεχής.

3.6.62* Δείξτε ότι μιά συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής αν και μόνο αν η συνάρτηση ολικής κύμανσης $v(x) = V_a^x f$ είναι απόλυτα συνεχής.

3.6.63 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = \sqrt{x}$ και

$$f(x) = \begin{cases} x^2|\sin(1/x)|, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f, g, $f \circ g$ είναι απόλυτα συνεχείς ενώ η $g \circ f$ δεν είναι απόλυτα συνεχής στο $[0, 1]$.

3.6.64 Δείξτε ότι αν η $f : [a, b] \to [c, d]$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$ και η $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz, τότε η $g \circ f$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$.

3.6.65 Δείξτε ότι αν η $f : [a, b] \to [c, d]$ είναι απόλυτα συνεχής και μονότονη στο $[a, b]$ και η $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[c, d]$, τότε η $g \circ f$ είναι απόλυτα συνεχής στο $[a, b]$.

3.6.66 (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση τού Cantor δεν είναι απόλυτα συνεχής στο $[0, 1]$.
(β) Σωστό ή Λάθος; $AC[a, b] = C[a, b] \cap BV[a, b]$.

Κυρτές συναρτήσεις

3.6.67 Δείξτε ότι αν οι f, g είναι κυρτές στο διάστημα I, τότε και η $f + g$ είναι κυρτή στο I.

3.6.68 Δείξτε ότι αν $c \geq 0$ και η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα I, τότε και η cf είναι κυρτή στο I.

3.6.69 Βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:
(α) $f(x) = x^x, \;\; x > 0$.
(β) $f(x) = (\log x)^2, \;\; x > 0$.
(γ) $f(x) = (1 + x + x^2)^{-1}$.
(δ) $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

3.6.70 Μιά συνάρτηση είναι και κυρτή και κοίλη στο διάστημα I. Δείξτε ότι είναι αφινική στο I.

3.6.71 Έστω f μιά κυρτή συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα I. Δείξτε ότι είτε η f είναι μονότονη στο I είτε υπάρχει $x_o \in I$ τέτοιο ώστε η f είναι φθίνουσα στο $I \cap (-\infty, x_o]$ και αύξουσα στο $I \cap [x_o, \infty)$.

3.6.72 (α) Δείξτε ότι αν οι f, g είναι κυρτές στο διάστημα I, τότε και η $\max\{f, g\}$ είναι κυρτή στο I.
(β) Έστω $\mathcal{F}$ ένα μη κενό σύνολο κυρτών συναρτήσεων στο διάστημα I. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in I$,

$$s(x) := \sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Δείξτε ότι η s είναι κυρτή στο I.

3.6.73 Δίνεται συνάρτηση f κυρτή στο $[a, b]$. Δείξτε ότι:
(α) Αν υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(a) = f(c) = f(b)$, τότε η f είναι σταθερή.
(β) Αν υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε τα σημεία $(a, f(a))$, $(c, f(c))$, $(b, f(b))$ είναι συνευθειακά, τότε η f είναι αφινική στο $[a, b]$.

3.6.74 Δίνονται αριθμοί $p, q \in \mathbb{R}$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Δείξτε ότι για κάθε $x, y > 0$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

3.6.75 Δείξτε ότι για $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, ισχύει

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

3.6.76 Αν $x_j > 0$ και $p_j > 0$ για $j = 1, 2, \ldots, n$, και $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, δείξτε ότι

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j} \leq \sum_{j=1}^{n} p_j x_j.$$

Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Τι συμβαίνει όταν $p_j = 1/n$ για κάθε j;
Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = -\log x$ είναι κυρτή στο $(0, \infty)$.

3.6.77 Δείξτε ότι αν $a \neq b$, τότε

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}.$$

3.6.78 Δείξτε ότι για $x, y > 0$,

$$x \log x + y \log y \geq (x + y) \log \frac{x + y}{2}.$$

3.6.79 Για $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \pi)$, θέτουμε $x = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$. Αποδείξτε τις ανισότητες

$$\prod_{k=1}^{n} \sin x_k \leq (\sin x)^n, \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin x_k}{x_k} \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$$

3.6.80 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και άνω φραγμένη, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

3.6.81 Σωστό ή Λάθος;
Αν η f είναι κυρτή και φραγμένη στο (a, ∞), τότε είναι σταθερή.

3.6.82 (α) Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή στο I και η g είναι κυρτή και αύξουσα στο $f(I)$, τότε η $g \circ f$ είναι κυρτή στο I.
(β) Δείξτε με παράδειγμα ότι η μονοτονία τής g στο (α) είναι απαραίτητη.

3.6.83 Βρείτε μιά συνάρτηση που είναι κυρτή στο $[0, 1]$ αλλά δεν είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1.

3.6.84 Βρείτε κυρτή συνάρτηση f στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{h \to 0-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = -\infty.$$

3.6.85 Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή στο φραγμένο, ανοικτό διάστημα I, τότε η f είναι κάτω φραγμένη στο I.

3.6.86 Δείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο διάστημα I, τότε η f^{-1} είναι κοίλη στο $f(I)$.

3.6.87 Δίνεται συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα I. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in I$,

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I.
Υπόδειξη: Η (3.7) ισχύει για τα t της μορφής $t = m/2^n$.

3.6.88 Σωστό ή Λάθος;
(α) Το γινόμενο δύο κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.
(β) Το γινόμενο δύο θετικών κυρτών συναρτήσεων είναι κυρτή συνάρτηση.

3.6.89 Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[0, 1]$ και $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0, 1]$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}\, dx \leq \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2}.$$

3.6.90 Έστω I ένα ανοικτό διάστημα. Μιά συνάρτηση $f : I \to (0, \infty)$ ονομάζεται **λογαριθμικά κυρτή** αν η συνάρτηση $\log f$ είναι κυρτή στο I. Δείξτε ότι:
(α) Κάθε λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή.
(β) Έστω ότι η f είναι θετική και δύο φορές παραγωγίσιμη στο I. Τότε η f είναι λογαριθμικά κυρτή στο I αν και μόνο αν $(f')^2 \leq ff''$ στο I.
(γ) Αν η f είναι αφινική και λογαριθμικά κυρτή στο I, τότε είναι σταθερή στο I.
(δ) Μιά θετική συνάρτηση f στο I είναι λογαριθμικά κυρτή αν και μόνο αν για κάθε $a, b \in I$ και κάθε $t \in [0, 1]$, ισχύει

$$f((1-t)a + tb) \leq [f(a)]^{1-t}\, [f(b)]^t.$$

3.6.91 (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(u) = u \log u$ είναι κυρτή στο $[0, \infty)$.
(β) Δίνονται θετικοί αριθμοί x, y, a, b με $bx \neq ay$. Δείξτε ότι

$$(x + y) \log \frac{x + y}{a + b} < x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b}.$$

3.6.92 Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[a, b]$, τότε η f είναι φραγμένη κύμανσης στο $[a, b]$.

3.6.93 Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή σε ένα διαστημα, τότε έχει το πολυ δύο διαστήματα μονοτονίας.

3.6.94 Έστω κυρτή συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ με $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
(α) Δείξτε ότι είτε η f είναι μονότονη στο (a, b), είτε έχει ελάχιστο σε ένα σημείο $c \in (a, b)$.
(β) Δείξτε ότι τα όρια $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to b-} f(x)$ υπάρχουν (δηλ. ανήκουν στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$).
(γ) Δείξτε ότι αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b).

3.6.95 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$a_2 + b_2 \leq a_1 + b_1 \quad \text{και} \quad 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 < b_1.$$

Έστω $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά μη σταθερή, κυρτή, αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\Phi(a_2) + \Phi(b_2) \leq \Phi(a_1) + \Phi(b_1).$$

Δείξτε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η Φ είναι αφινική στο $[a_1, b_1]$ και $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$.

3.7 Σημειώσεις

Οι συναρτήσεις Lipschitz μελετήθηκαν από τον Rudolph Lipschitz το 1876. Χρησιμοποιούνται στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

Το σημαντικότερο θεώρημα για τις μονότονες συναρτήσεις είναι το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue: *Κάθε μονότονη συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα, είναι παραγωγίσιμη έξω από ένα σύνολο μέτρου μηδέν.* Στο κεφάλαιο για το μέτρο Lebesgue θα δούμε τι σημαίνει *σύνολο μέτρου μηδέν.* Η απόδειξη πάντως του θεωρήματος είναι δύσκολη και έξω από τα πλαίσια τού βιβλίου· βλ. [2], [5], [8].

Οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης ονομάζονται και συναρτήσεις φραγμένης μεταβολής. Περισσότερες ιδιότητές τους υπάρχουν στα βιβλία [1], [2], [5], [8]. Αυτή η κλάση πρωτοεμφανίστηκε στη μελέτη τού Camille Jordan για τη σύγκλιση των σειρών Fourier στα τέλη του 19ου αιώνα. Οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης χρησιμοποιούνται στη θεωρία τού ολοκληρώματος Riemann-Stieljes που γενικεύει το συνηθισμένο ολοκλήρωμα τού Riemann· βλ. [2], [8]. Ο Jordan ήταν και ο πρώτος που παρατήρησε τη σύνδεση της φραγμένης κύμανσης με την ευθυγραμμισιμότητα μιάς καμπύλης. Η έννοια αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη γεωμετρική θεωρία μέτρου και τις εφαρμογές της σε άλλους κλάδους της Ανάλυσης.

Οι απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν από τους G.Vitali και H.Lebesgue στις αρχές του 20ού αιώνα. Είναι οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού για το ολοκλήρωμα τού Lebesgue.

Η Άσκηση 3.6.46 οφείλεται στον Lebesgue. Η Άσκηση 3.6.95 οφείλεται στον A. Yu. Solynin.

Κεφάλαιο 4

Ακολουθίες συναρτήσεων

4.1 Η έννοια της ακολουθίας συναρτήσεων

Ορισμός 4.1.1 Ακολουθία συναρτήσεων είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων. Συμβολίζουμε μια ακολουθία συναρτήσεων με $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Θεωρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι όλες ορισμένες σ' ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in E$, προκύπτει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Παράδειγμα 4.1.2 Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$f_n(x) = 1 + \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για σταθεροποιημένο $n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι μια πραγματική συνάρτηση. Για παράδειγμα η f_1 είναι η συνάρτηση με τύπο $f_1(x) = 1 + x,\ x \in \mathbb{R}$, ενώ η f_2 έχει τύπο $f_2(x) = 1 + x^2/4$. Για σταθεροποιημένο $x \in \mathbb{R}$, η $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών· π.χ. $f_n(0) = \{1, 1, 1, \dots\}$, $f_n(1) = \{1 + \frac{1}{n^n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Παράδειγμα 4.1.3 Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν τύπους $f_1(x) = x + 1$ και $f_2(x) = x + 1/2$. Για $x = 5$ προκύπτει η πραγματική ακολουθία $f_n(5) = \{5 + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$, ενώ για $x = -1$ προκύπτει η ακολουθία $f_n(-1) = \{-1 + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ορισμός 4.1.4 Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται **σημειακά φραγμένη**, αν για κάθε $x \in E$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται **ομοιόμορφα φραγμένη** αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 4.1.5 Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = \cos nx,\ x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη διότι $|\cos nx| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $g_n(x) = \frac{1}{nx},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι σημειακά φραγμένη διότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ η πραγματική ακολουθία $\{\frac{1}{nx}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη (και μάλιστα συγκλίνει στο 0). Η $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Πράγματι ισχύει $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{nx} = +\infty$· άρα δεν μπορεί να υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|\frac{1}{nx}| \leq M,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 4.1.6 Η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται **σημειακά αύξουσα** (**φθίνουσα**) στο σύνολο E αν για κάθε $x \in E$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα).

Παράδειγμα 4.1.7 Η $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ του Παραδείγματος 3 είναι σημειακά φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και είναι σημειακά αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

4.2 Σημειακή σύγκλιση

Ορισμός 4.2.1 Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει σημειακά** στο E προς τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και γράφουμε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E, αν για κάθε $x \in E$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Από τον ορισμό του ορίου πραγματικής ακολουθίας προκύπτει ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E αν και μόνο αν

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq n_o,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 4.2.2 Είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n = e^x$. Άρα για την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = (1+x/n)^n,\ x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου $f(x) = e^x$.

Παράδειγμα 4.2.3 Έστω $f_n(x) = x + (-1)^n$. Για $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = x + 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = x - 1.$$

Άρα η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.2.4 Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $E \subset \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$, $x \in E$. Τότε για κάθε $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) + \frac{1}{n} \right) = f(x).$$

Άρα $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.

Παράδειγμα 4.2.5 Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0, 1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0, 1), \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες του ορίου παραγματικών ακολουθιών αποδεικνύεται εύκολα το παρακάτω θεώρημα· η απόδειξή του αφήνεται για άσκηση.

Θεώρημα 4.2.6 *Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και $g_n \xrightarrow{\sigma} g$ στο E και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{\sigma} c_1 f + c_2 g$ στο E και $f_n g_n \xrightarrow{\sigma} fg$ στο E.*

Ορισμός 4.2.7 Αν $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε στο E τις επεκτεταμένες πραγματικές συναρτήσεις $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ με τις παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned} (\sup_n f_n)(x) &= \sup_n (f_n(x)), \\ (\inf_n f_n)(x) &= \inf_n (f_n(x)), \\ (\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) &= \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)), \\ (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) &= \liminf_{n\to\infty} (f_n(x)). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.8 Για την ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $f_n(x) = x + \frac{(-1)^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sup_n f_n(x) = x + \frac{1}{2}$, $\inf_n f_n(x) = x - 1$, $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = x$, $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

4.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 4.3.1 Δίνονται δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g, ορισμένες και οι δύο στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε ως **απόσταση** των f και g τον επεκτεταμένο πραγματικό αριθμό

$$\mathrm{d}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in E\}.$$

Για την απόσταση των f και g θα χρησιμοποιούμε επίσης και τους συμβολισμούς $\mathrm{d}_E(f,g)$ και $\|f - g\|_E$.

Παράδειγμα 4.3.2 Αν $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, τότε

$$\mathrm{d}_{[0,1]}(f,g) = \sup\{x - x^2 : x \in [0,1]\} = \max_{x\in[0,1]}(x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Παράδειγμα 4.3.3 Αν $f(x) = \tan^{-1} x$, $g(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f,g) = \sup\{|\tan^{-1} x - 2| : x \in \mathbb{R}\} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(2 - \tan^{-1} x) = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 4.3.4 Αν $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x - \sin x| = +\infty.$$

Ορισμός 4.3.5 Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** στο E προς τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και γράφουμε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E, αν $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_E(f_n, f) = 0$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τον ορισμό του ορίου πραγματικής ακολουθίας και τον ορισμό της απόστασης συναρτήσεων, βλέπουμε ότι μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται μόνο από το ε) τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_o, \ \forall x \in E.$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε τα γραφήματα των συναρτήσεων f_n από το n_o και πέρα βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

Θεώρημα 4.3.6 *Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E, τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E.*

Απόδειξη.
Έστω $x \in E$. Επειδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E και $|f_n(x) - f(x)| \leq \mathrm{d}_E(f_n, f)$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. $\square$

Το Θεώρημα 4.3.6 οδηγεί στην εξής μέθοδο για να βρίσκουμε το ομοιόμορφο όριο μιάς ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ (εφόσον βέβαια η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα): Πρώτα βρίσκουμε το σημειακό όριο που είναι μια συνάρτηση f. Λόγω του θεωρήματος, αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f. Υπολογίζουμε (ή εκτιμούμε), λοιπόν, την πραγματική ακολουθία $\mathrm{d}(f_n, f)$ και εξετάζουμε αν συγκλίνει στο 0. Για τον υπολογισμό (ή την εκτίμηση) τής $\mathrm{d}(f_n, f)$ συχνά είναι χρήσιμες διάφορες μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού.

Παράδειγμα 4.3.7 Έστω

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Άρα $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Επομένως

$$\mathrm{d}(f_n, f) = \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \sup_{\mathbb{R}} \frac{x}{1 + nx^2}.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f_n:

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

Οι ρίζες της παραγώγου είναι τα σημεία $\pm 1/\sqrt{n}$ και ισχύει $f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm 1/(2\sqrt{n})$. Επίσης

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 0.$$

Άρα η $|f_n|$ έχει μέγιστο ίσο με $1/(2\sqrt{n})$, δηλαδή $\mathrm{d}(f_n, f) = 1/(2\sqrt{n})$. Η ακολουθία αυτή τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.3.8 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $x \in (0, \infty)$. Η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά πρός τη μηδενική συνάρτηση f. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι $\mathrm{d}(f_n, f) = \sup |1/(nx)| = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 4.3.9 Έστω

$$f_n(x) = \frac{2n}{nx+3},\ x \in (0,\infty).$$

Τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $(0,\infty)$, όπου $f(x) = 2/x$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,\infty)$ διότι

$$\mathrm{d}_{(0,\infty)}(f_n, f) = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{6}{nx^2+3x} = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,+\infty)$ για οποιοδήποτε $a > 0$, διότι

$$\mathrm{d}_{[a,\infty)}(f_n, f) = \sup_{x\in[a,\infty)} \frac{6}{nx^2+3x} \le \frac{6}{na^2+3a} \to 0, \text{ όταν } n \to \infty.$$

Πρόταση 4.3.10 *Δίνονται συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$ και f ορισμένες στο σύνολο E. Αν υπάρχει πραγματική ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε*
(α) $\forall x \in E,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ |f_n(x) - f(x)| \le a_n$,
(β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
τότε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

Απόδειξη.
Από τις υποθέσεις (α) και (β) προκύπτει άμεσα ότι

$$0 \le \mathrm{d}_E(f_n, f) \le a_n \to 0.$$

Άρα $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E. □

Παράδειγμα 4.3.11 Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$. Ισχύει $|f_n| \le \frac{1}{n} \to 0$. Άρα $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[0,1]$, όπου f η μηδενική συνάρτηση.

Θεώρημα 4.3.12 *(α) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και $g_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο E και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{o\mu} c_1 f + c_2 g$ στο E.*
(β) Αν επιπλέον οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \xrightarrow{o\mu} fg$ στο E.

Απόδειξη.
(α) Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|},\ \forall x \in E,\ \forall n \ge n_o.$$

Τότε $\forall x \in E,\ \forall n \geq n_o$, ισχύει

$$\begin{aligned} & |(c_1 f_n(x) + c_2 g_n(x)) - (c_1 f(x) + c_2 g(x))| \\ \leq\ & |c_1|\,|f_n(x) - f(x)| + |c_2|\,|g_n(x) - g(x)| < |c_1|\frac{\varepsilon}{2|c_1|} + |c_2|\frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $c_1 f_n + c_2 g_n \xrightarrow{\text{ομ}} c_1 f + c_2 g$ στο E.

(β) Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leq M,\ \ \forall x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Λόγω του Θεωρήματος 4.3.6, ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in E$. Άρα $|f(x)| \leq M,\ \forall x \in E$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M},\ \ \forall x \in E,\ \forall n \geq n_o.$$

Τότε $\forall x \in E,\ \forall n \geq n_o$, ισχύει

$$\begin{aligned} & |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ \leq\ & |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ =\ & |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x)| + |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| \\ <\ & \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Η υπόθεση στο (β) ότι οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες δεν μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.3.13 Έστω $f_n(x) = x + \frac{1}{n},\ x \in \mathbb{R}$. Η $\{f_n\}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων. Συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ πρός τη συνάρτηση f με $f(x) = x$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη διότι $\mathrm{d}(f_n, f) = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς $f_n^2 \xrightarrow{\sigma} f^2$ στο $\mathbb{R}$. Η σύγκλιση όμως δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}(f_n^2, f^2) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| = +\infty.$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας βοηθά να αποφασίσουμε (συνήθως σε αποδείξεις θεωρημάτων) αν μια ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα χωρίς να γνωρίζουμε τη συνάρτηση όριο.

Θεώρημα 4.3.14 (Κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση στο E αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \ \forall n, m \geq n_o, \ \forall x \in E. \tag{4.1}$$

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. Έστω f η συνάρτηση-όριο. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o.$$

Επομένως, αν $x \in E$, $n \geq n_o$, $m \geq n_o$, τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Αντιστρόφως: Αν $x \in E$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι Cauchy· άρα συγκλίνουσα. Έστω $f(x)$ το όριό της. Έτσι ορίζεται μιά συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E. Θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

Έστω $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε n_o τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.1) με $\frac{\varepsilon}{2}$ στη θέση ε, δηλαδή

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n, m \geq n_o, \ \forall x \in E.$$

Για σταθεροποιημένο n παίρνουμε όριο $m \to \infty$ και προκύπτει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o,$$

δηλαδή $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E. □

4.4 Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Στην παράγραφο αυτή θα αντιμετωπίσουμε το ερώτημα: Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ ή $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ και όλες οι f_n είναι συνεχείς, είναι και η f συνεχής; Θα δούμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση, σε αντίθεση με τη σημειακή, εγγυάται τη συνέχεια της f.

Ας ξανακοιτάξουμε το Παράδειγμα 4.2.5: Έχουμε $f_n(x) = x^n, \ x \in [0, 1]$ και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0, 1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0, 1), \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$$

Όλες οι f_n είναι συνεχείς στο $[0, 1]$ ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Θεώρημα 4.4.1 *Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E, $x_o \in E$ και όλες οι f_n είναι συνεχείς στο x_o, τότε και η f είναι συνεχής στο x_o.*
Απόδειξη.
Αν το x_o είναι απομονωμένο σημείο τού E, τότε η f είναι συνεχής στο x_o. Έστω, λοιπόν, ότι το x_o είναι σημείο συσσώρευσης τού E. Έστω $\varepsilon > 0$· από την υπόθεση, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \geq n_o.$$

Επειδή η συνάρτηση f_{n_o} είναι συνεχής στο x_o, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_o)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta).$$

Άρα, για $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$,

$$|f(x) - f(x_o)| \leq |f(x) - f_{n_o}(x)| + |f_{n_o}(x) - f_{n_o}(x_o)| + |f_{n_o}(x_o) - f(x_o)| < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x_o. □

Παράδειγμα 4.4.2 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $x \in (0, \infty)$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.3.8, η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $(0, \infty)$ πρός τη μηδενική συνάρτηση f. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, \infty)$. Η οριακή συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Παράδειγμα 4.4.3 Έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, 1), \\ \frac{2}{n}, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [0, 2]$, ισχύει $0 \leq f_n(x) \leq 2/n$. Άρα η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2]$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Η συνάρτηση-όριο είναι συνεχής παρόλο που όλες οι συναρτήσεις f_n είναι ασυνεχείς.

Το ακόλουθο είναι ένα μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος 4.4.1.

Θεώρημα 4.4.4 (Κριτήριο Dini για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $K \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι*
(α) *$f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο K.*
(β) *Όλες οι f_n είναι συνεχείς στο K.*
(γ) *Η f είναι συνεχής στο K.*
(δ) *Το K είναι συμπαγές.*
(ε) *Η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι είτε σημειακά αύξουσα είτε σημειακά φθίνουσα.*
Τότε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο K.

Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι σημειακά φθίνουσα· αν είναι σημειακά αύξουσα, η απόδειξη είναι παρόμοια. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n = f_n - f$ που είναι φθίνουσα και συγκλίνει σημειακά στο K προς τη μηδενική συνάρτηση. Αρκεί να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in K$, τότε $0 \leq g_n(x) \searrow 0$. Άρα υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Επειδή η g_{n_x} είναι συνεχής στο x, υπάρχει περιοχή $\Pi(x)$ του x έτσι ώστε

$$0 \leq g_{n_x}(t) < \varepsilon, \quad \forall t \in \Pi(x) \cap K. \tag{4.2}$$

Η ακολουθία συναρτήσεων $\{g_n\}$ είναι σημειακά φθίνουσα· άρα, λόγω της (4.2),

$$0 \leq g_n(t) < \varepsilon, \ \ \forall t \in \Pi(x) \cap K, \ \forall n \geq n_x. \tag{4.3}$$

Οι περιοχές $\Pi(x)$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς συνόλου K. Επομένως υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$ τού K τέτοια ώστε

$$K \subset \Pi(x_1) \cup \Pi(x_2) \cup \cdots \cup \Pi(x_N).$$

Θέτουμε $n_o = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \ldots, n_{x_N}\}$. Τότε, λόγω της (4.3),

$$0 \leq g_n(t) < \varepsilon, \ \ \forall t \in K, \ \forall n \geq n_o, \tag{4.4}$$

που σημαίνει ότι η $\{g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K προς τη μηδενική συνάρτηση.
□

Παράδειγμα 4.4.5 Έστω

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η $\{f_n\}$ είναι σημειακά φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$, διότι

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f_n, f) = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η $\{f_n\}$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις τού κριτηρίου τού Dini εκτός από την υπόθεση (δ): το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 4.4.6 Έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x^2 - 2nx, & x \in [0, 2/n], \\ 0, & x \in [2/n, 2]. \end{cases}$$

Τότε $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0, 2]$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, 2]$, διότι

$$\mathrm{d}_{[0,2]}(f_n, f) = \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η $\{f_n\}$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις τού κριτηρίου τού Dini εκτός από την υπόθεση (ε).

4.5 Εναλλαγή ορίων

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Έστω ξ ένα σημείο συσσώρευσης τού συνόλου E. Κάτω από ποιές συνθήκες μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή των ορίων για $x \to \xi$ και για $n \to \infty$; Με άλλα λόγια θα εξετάσουμε πότε ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x) = \lim_{x\to\xi} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Θεώρημα 4.5.1 *Δίνονται ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ στο σύνολο E και ένα σημείο συσσώρευσης ξ τού E. Υποθέτουμε*
(α) *$f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E,*
(β) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το όριο $\lim_{x\to\xi} f_n(x)$ υπάρχει· έστω $a_n := \lim_{x\to\xi} f_n(x)$.*
Τότε η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\xi} f(x),$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x) = \lim_{x\to\xi} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n, m \geq n_o, \quad \forall x \in E.$$

Από την υπόθεση (β), για $n, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in E$ με $0 < |x - \xi| < \delta$,

$$|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Άρα αν $n, m \geq n_o$ και $x \in E$ με $0 < |x - \xi| < \delta$, τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| < \varepsilon.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Αφού η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, θα είναι και συγκλίνουσα. Έστω $a := \lim a_n$. Υπάρχει τότε $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_1.$$

Από την υπόθεση (β), υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_2, \ \forall x \in E.$$

Θέτουμε $N := \max\{n_1, n_2\}$. Από την υπόθεση (α), υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in E \quad \text{με} \quad 0 < |x - \xi| < \delta.$$

Επομένως, αν $x \in E$ με $0 < |x - \xi| < \delta$, τότε

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - a_N| + |a_N - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = a$. □

4.6 Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωση

Ένα βασικό και συχνά εμφανιζόμενο ερώτημα στην Ανάλυση είναι πότε μ-πορούμε να βάλουμε το όριο μέσα στο ολοκλήρωμα. Πιό συγκεκριμένα: πότε ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx. \tag{4.5}$$

Παράδειγμα 4.6.1 Έστω $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n]}(x)$. Ισχύει $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f η μηδενική συνάρτηση. Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 f$.

Το ακόλουθο θεώρημα λέει ότι η ισότητα (4.5) ισχύει όταν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

Θεώρημα 4.6.2 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$. Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{4.6}$$

Απόδειξη.
Από το Θεώρημα 4.4.1 η f είναι συνεχής, άρα και ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επίσης ισχύει

$$0 \le \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a)\ \mathrm{d}(f_n, f).$$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f_n, f) = 0$ και το θεώρημα αποδείχτηκε.
□

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί με την υπόθεση ότι οι f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ (και όχι κατ΄ ανάγκη συνεχείς)· βλ. τα βιβλία [4], [8], [10] ή την Άσκηση 4.8.33.

Παράδειγμα 4.6.3 Έστω

$$f_n(x) = \frac{2n}{nx+3},\ x \in (0,\infty).$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.3.9, $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $(0,\infty)$, όπου $f(x) = 2/x$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,\infty)$. Όμως $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,+\infty)$ για οποιοδήποτε $a > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6.2,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{2n}{nx+3}\, dx = \int_1^2 \frac{2}{x}\, dx = 2(\log 2 - \log 1) = 2\log 2.$$

Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2n}{nx+3}\, dx$$

δεν μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο. Για να το βρούμε υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα και μετά παίρνουμε όριο για $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2n}{nx+3}\, dx = \lim_{n\to\infty} [2\log(nx+3)]_0^1 = \lim_{n\to\infty} 2[\log(n+3) - \log 3] = +\infty.$$

Παράδειγμα 4.6.4 Το σύνολο $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $q_1, q_2, q_3 \dots$ μια αρίθμησή του. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = q_1, q_2, \dots, q_n, \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_n\}. \end{cases}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση f_n έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας. Άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$· επίσης προφανώς ισχύει $\int_0^1 f_n = 0$.

Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση της ακολουθίας $\{f_n\}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[0,1]$, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Υπολογίζοντας τα πάνω και κάτω αθροίσματα Riemann, βρίσκουμε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

4.7 Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε το ερώτημα: Πότε μπορούμε να εναλλάξουμε τις πράξεις της παραγώγισης και του ορίου· πότε, δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = [\lim_{n\to\infty} f_n]'; \tag{4.7}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση της $\{f_n\}$ δεν εγγυάται την ισχύ της (4.7).

Παράδειγμα 4.7.1 Έστω $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in (0, 2\pi)$. Τότε $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. Άρα η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, 2\pi)$ προς τη μηδενική συνάρτηση. Όμως $f_n'(x) = \cos nx$. Η ακολουθία $\{f_n'\}$ δεν συγκλίνει (σημειακά) στο $(0, 2\pi)$ διότι $f_n'(\pi) = (-1)^n$.

Παράδειγμα 4.7.2 Έστω

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς τη μηδενική συνάρτηση f. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Πράγματι, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}(f_n, f) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία των παραγώγων είναι η

$$f_n'(x) = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\{f_n'\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ προς τη μηδενική συνάρτηση, ενώ η $f_n'(0) = n$ συγκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 4.7.3 Έστω

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^{1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει $|f_n(x)| \leq n^{-1/2}$ για όλα τα n και όλα τα x. Άρα η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς τη μηδενική συνάρτηση f. Η ακολουθία των παραγώγων είναι η

$$f_n'(x) = n^{1/2}\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ακολουθία αριθμών $\{f_n'(x)\}$ δεν είναι φραγμένη· επομένως ούτε και συγκλίνουσα. Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $n \in \mathbb{N}$ και $|\cos(nx)| \geq 1/2$, τότε $|f_n'(x)| \geq n^{1/2}/2$.
Αν $n \in \mathbb{N}$ και $|\cos(nx)| < 1/2$, τότε $|\cos(2nx)| = |2\cos^2(nx) - 1| > 1/2$. Άρα

$$|f_{2n}'(x)| = (2n)^{1/2}|\cos(2nx)| \geq \frac{(2n)^{1/2}}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |f_n'(x)| \geq n^{1/2}/2\}$ είναι άπειρο. Επομένως η $\{f_n'(x)\}$ δεν είναι φραγμένη. Τελικά λοιπόν η ακολουθία $\{f_n\}$ αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις και είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα, ενώ η ακολουθία των παραγώγων $\{f_n'\}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in \mathbb{R}$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι κάτω από ισχυρές προϋποθέσεις, η (4.7) ισχύει:

Θεώρημα 4.7.4 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Όλες οι f_n έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$.*
(β) *Η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x_o)\}$ συγκλίνει για ένα τουλάχιστο $x_o \in [a,b]$.*
(γ) *Η ακολουθία των παραγώγων $\{f_n'\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*
Τότε:
(i) *η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ πρός μιά συνάρτηση f.*
(ii) *Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$.*
(iii) $f_n' \xrightarrow{o\mu} f'$ *στο $[a,b]$.*

Απόδειξη.
Πρώτα θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $[a,b]$ πρός μια συνάρτηση f. Έστω $C = \lim_{n\to\infty} f_n(x_o)$ και έστω $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),\ x \in [a,b]$. Από υπόθεση του θεωρήματος, $f_n' \xrightarrow{o\mu} g$ στο $[a,b]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού προκύπτει ότι

$$f_n(x) = f_n(x_o) + \int_{x_o}^{x} f_n', \quad x \in [a,b]. \tag{4.8}$$

Παίρνουμε όρια στην (4.8) για $n \to \infty$ και, λόγω τού Θεωρήματος 4.6.2, προκύπτει

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = C + \int_{x_o}^{x} g, \quad x \in [a,b]. \tag{4.9}$$

Ορίζουμε $f(x) = C + \int_{x_o}^{x} g,\ \ x \in [a,b]$. Η (4.9) σημαίνει ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[a,b]$. Επίσης από το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού προκύπτει ότι $f' = g$ και επόμένως $f_n' \xrightarrow{o\mu} f'$ στο $[a,b]$.

Μένει να δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$: Γιά $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_o) - f(x_o) + \int_{x_o}^{x} (f_n' - f') \right| \\
&\leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + \int_{x_o}^{x} |f_n' - f'| \\
&\leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + (b-a)\, \mathrm{d}(f_n', f').
\end{aligned}$$

Άρα $\mathrm{d}(f_n, f) \leq |f_n(x_o) - f(x_o)| + (b-a)\, \mathrm{d}(f_n', f')$. Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ προκύπτει ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$. □

Το θεώρημα αυτό μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς την υπόθεση ότι οι f_n' είναι συνεχείς αλλά η απόδειξη είναι πιό δύσκολη· βλ. τα βιβλία [4] ή [8].

4.8 Ασκήσεις

4.8.1 Αποδείξτε το Θεώρημα 4.2.6.

4.8.2 Εξετάστε τη σύγκλιση (σημειακή και ομοιόμορφη) της ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(x) = x^{2n}/(1 + x^{2n}),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$.

4.8.3 Δείξτε ότι στο Παράδειγμα 4.2.2 η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε επίσης τη σύγκλιση της ακολουθίας των παραγώγων.

4.8.4 Για μιά πραγματική ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία των σταθερών συναρτήσεων $f_n(x) = a_n,\ x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου f είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = a,\ x \in \mathbb{R}$.

4.8.5 Έστω f μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $E \subset \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n = f,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

4.8.6 Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και καθεμιά από τις συναρτήσεις f_n είναι φραγμένη στο E, δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.

4.8.7 Έστω $\mathcal{F}$ ένα σύνολο πραγματικών συναρτήσεων. Λέμε ότι η συνάρτηση f **προσεγγίζεται ομοιόμορφα** στο σύνολο E από συναρτήσεις τού συνόλου $\mathcal{F}$ αν γιά κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\mathrm{d}_E(f,g) < \varepsilon$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση f προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο E από συναρτήσεις τού συνόλου $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $g_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

4.8.8 Σωστό ή Λάθος;

(α) Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι φθίνουσα στο E τότε και η f είναι φθίνουσα στο E.

(β) Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι γνησίως φθίνουσα στο E τότε και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο E.

(γ) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E και καθεμία από τις συναρτήσεις f_n είναι φραγμένη στο E τότε η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.

(δ) Αν οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ε) Αν οι συναρτήσεις f_n είναι συνεχείς στο $[0,1]$ και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[0,1]$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

(στ) Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ σε κάθε διάστημα $[a,b]$, τότε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$.

4.8.9 Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $(0,1)$ και η οριακή συνάρτηση είναι συνεχής στο $(0,1)$.

4.8.10 Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σημειακά στο $[0,1]$ πρός τη μηδενική συνάρτηση αλλά ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \neq 0.$$

4.8.11 Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $f_n(x) := f(x + \frac{1}{n})$, δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $\mathbb{R}$.

4.8.12 Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ \frac{1}{(n+1)x-1}, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

4.8.13 Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος}, \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ περιττός}, \end{cases}$$

συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Βρείτε υπακολουθία τής $\{f_n\}$ η οποία να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4.8.14 Εξετάστε τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,1]$.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2}, \\ \text{(b)} & f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2}, \\ \text{(c)} & f_n(x) = x^n(1-x), \\ \text{(d)} & f_n(x) = nx^n(1-x), \\ \text{(e)} & f_n(x) = n^3x^n(1-x)^4, \\ \text{(f)} & f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}, \\ \text{(g)} & f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}. \end{array}$$

4.8.15 Εξετάστε τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο A.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f_n(x) = \arctan \dfrac{2x}{x^2+n^3}, \quad A = \mathbb{R}, \\ \text{(b)} & f_n(x) = n \log \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right), \quad A = \mathbb{R}, \\ \text{(c)} & f_n(x) = n \log \dfrac{1+xn}{nx}, \quad A = (0, \infty), \\ \text{(d)} & f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}, \quad A = \mathbb{R}, \\ \text{(e)} & f_n(x) = n(\sqrt[n]{x}-1), \quad A = [1,a],\ a > 1. \end{array}$$

4.8.16 Δίνεται συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}, \quad x \in [a,b].$$

Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$.

4.8.17* Ορίζουμε $f_n(x) = n \sin \sqrt{4\pi^2 n^2 + x^2}$. Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$, $a > 0$. Εξετάστε αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4.8.18 Μιά ακολουθία ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση-όριο είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.8.19 Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f'$ στο $\mathbb{R}$. Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι η υπόθεση τής ομοιόμορφης συνέχειας είναι απαραίτητη.

4.8.20* Μιά ακολουθία πολυωνύμων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση-όριο είναι πολυώνυμο.

4.8.21 Έστω $f_n(x) = n^p x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$, όπου p μια πραγματική παράμετρος. Δείξτε ότι για κάθε τιμή τού p, η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ προς κάποια συνάρτηση f. Για ποιές τιμές τού p η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές τού p ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$;

4.8.22 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$, $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ προς μιά συνάρτηση f. Εξετάστε αν ισχύει η ισότητα $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$;

4.8.23 Έστω $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση f.
(β) Δείξτε ότι η $\{f'_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση g.
(γ) Δείξτε ότι $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά $f'(0) \neq g(0)$.
(δ) Για ποιά διάστηματα $[a, b]$ ισχύει $f'_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο $[a, b]$;

4.8.24 Έστω $f_n(x) = \frac{1}{ne^{n^2x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς μια συνάρτηση f.
(β) Δείξτε ότι η $\{f'_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς τη συνάρτηση f'.
(γ) Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{f'_n\}$ δεν είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα που περιέχει το 0.
(δ) Δείξτε ότι η σύγκλιση της $\{f'_n\}$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε κέιστό διάστημα που δεν περιέχει το 0.

4.8.25 Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = (1 + x/n)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την e^x σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε επίσης ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

4.8.26 Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων, βρείτε το σημειακό τους όριο και τα διαστήματα στα οποία η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Επίσης εξετάστε τη σύγκλιση των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων.
(α) $f_n(x) = xe^{-nx}, \ x \in [0, \infty)$.
(β) $f_n(x) = nxe^{-nx}, \ x \in [0, \infty)$.

4.8.27* Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n, \ x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ και η συνεχής συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $\{gf_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

4.8.28 Μελετήστε σε σχέση με το κριτήριο τού Dini (Θεώρημα 4.4.4) τις παρακάτω ακολουθίες συανρτήσεων:
(α) $f_n(x) = 1 - x^n, \ x \in [0,1]$.
(β)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad x \in (0, 1/n), \\ 1, & \text{αν} \quad x \in \{0\} \cup [1/n, 1]. \end{cases}$$

4.8.29 Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n : E \to [a,b]$. Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a,b]$, δείξτε ότι

$$g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομ}} g \circ f \text{ στο } E.$$

4.8.30 Δίνονται μιά ακολουθία συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$ και μιά συνάρτηση $g : A \to E$. Δείξτε ότι αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E, τότε

$$f_n \circ g \xrightarrow{\text{ομ}} f \circ g \text{ στο } A.$$

4.8.31 Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο E και ότι καθεμιά από τις f_n είναι συνεχής στο E. Αν $x \in E$ και $\{x_n\}$ είναι μια ακολουθία στο E τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.
(Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα).

4.8.32* Έστω ότι η $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ανισότητα $|f_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ τέτοια ώστε το όριο $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(q)$ να υπάρχει για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$.

4.8.33* Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες ολοκληρώσιμες (κατά Riemann) στο διάστημα $[a,b]$. Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

4.8.34 Δίνονται συναρτήσεις $\{f_n\}$ και f που είναι ολοκληρώσιμες (κατά Riemann) στο διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|f(x)| \leq M$, γιά κάθε $x \in [a,b]$. Αν για κάθε $\eta > 0$, $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a+\eta, b-\eta]$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

4.8.35* (Όριο διπλής ακολουθίας) Δίνεται μια διπλή ακολουθία, δηλαδή μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη συνάρτηση $g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με την ισότητα

$$g_n(m) = f(m,n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Υποθέτουμε ότι $g_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο $\mathbb{N}$, όπου $g(m) = \lim_{n\to\infty} f(m,n)$. Αν το επαναλαμβανόμενο όριο

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(m,n)$$

υπάρχει, δείξτε ότι το διπλό όριο $\lim_{m,n\to\infty} f(m,n)$ επίσης υπάρχει, και ισχύει

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f(m,n) = \lim_{m,n\to\infty} f(m,n).$$

4.8.36* Για $x \in [0,\infty)$ και $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}.$$

Δείξτε ότι:
(α) $0 = f_n(0) < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1 + x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x > 0.$
(β) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ για $0 < a < b < \infty$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.
(Υπόδειξη: Επαγωγή και Dini).

4.8.37* (α) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (i) Για κάθε $x \in [0,1]$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει, και (ii) ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$.
(β) Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (i) Για κάθε $x \in [0,1]$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει, και (ii) ισχύει $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$.
(γ) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (i) Για κάθε $x \in [0,1]$, η πραγματική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει, και (ii) ισχύει $\int_0^1 f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4.8.38* Δίνονται μιά ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$ και ένα πυκνό υποσύνολο D του E. Αν $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο E και $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο D, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο E.

4.9 Σημειώσεις

Η ομοιόμορφη σύγκλιση πρωτοεμφανίστηκε στα μέσα τού 19ου αιώνα (βλ. [2, σελ.160]). Ο Karl Weierstrass και οι μαθητές του αντιλήφθηκαν γρήγορα τη θεμελιώδη σημασία της και ανέπτυξαν με αυστηρότητα τη σχετική θεωρία. Βλ. επίσης και το άρθρο [G.H.Hardy, *Sir George Stokes and the concept of uniform convergence*, Proc. Cambridge Philosophical Soc. 19 (1918), 148-156].

Ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης με χρήση της απόστασης $d(f_n, f)$ υπάρχει στο [10].

Ασφαλώς το πιό χρήσιμο αποτέλεσμα για την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι το θεώρημα για την εναλλαγή ολοκλήρωσης και ορίου (βλ. Θεώρημα 4.6.2 και Άσκηση 4.8.34). Υπάρχει ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα το οποίο αποδείχθηκε από τον Arzelà το 1885.

Θεώρημα 4.9.1 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι όλες ολοκληρώσιμες (κατά Riemann) στο διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ στο $[a, b]$ και ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Το θεώρημα αυτό είναι ειδική περίπτωση τού Θεωρήματος Κυριαρχούμενης Σύγκλισης τού Lebesgue (βλ. [2], [5], [8]). Υπάρχουν όμως και αποδείξεις του (δύσκολες) χωρίς χρήση της θεωρίας τού Lebesgue. Βλ. [F.Cunningham, *Taking limits under the integral sign*, Math. Mag. 40 (1967), 179-186], [H.Kestelman, *Riemann integration of limit-functions*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 182-187], [W. A. Luxemburg, Amer. Math. Monthly 78 (1971), 970-979].

Στο [1] υπάρχει και η λύση της Άσκησης 4.8.35 η οποία είναι πολλές φορές χρήσιμη.

Οι έννοιες της σημειακής και της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούν να οριστούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για ακολουθίες πραγματικών (ή μιγαδικών) συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε οποιοδήποτε σύνολο. Τα θεωρήματα 4.3.6, 4.3.14, 4.4.1, 4.4.4, 5.2.1 (με τις προφανείς τροποποιήσεις στίς διατυπώσεις και στις αποδείξεις τους) συνεχίζουν να ισχύουν.

Κεφάλαιο 5

Σειρές συναρτήσεων

5.1 Εισαγωγικά

Ορισμός 5.1.1 *Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *που είναι όλες ορισμένες στο σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$. *Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *που ορίζονται από την ισότητα*

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \quad x \in E.$$

Αν η $\{s_n\}$ *συγκλίνει σημειακά στο* E *προς μιά συνάρτηση* s, *τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει σημειακά στο* E *προς τη συνάρτηση* s *και γράφουμε*

$$s \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Αν $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ *στο* E, *τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* E *προς τη συνάρτηση* s *και γράφουμε*

$$s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Η ακολουθία $\{s_n\}$ *ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Παράδειγμα 5.1.2 Έστω $f_n(x) = x^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Άρα $s_n \xrightarrow{\sigma} s$ στο $(-1,1)$, όπου $s(x)=\frac{1}{1-x}$, δηλαδή

$$\frac{1}{1-x} \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(-1,1)$ διότι

$$\mathrm{d}_{(-1,1)}(s_n,s)=\sup_{x\in(-1,1)}\frac{|x|^n}{|1-x|}=+\infty.$$

Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[-a,a]$ για οποιοδήποτε a με $0<a<1$. Πράγματι

$$\mathrm{d}_{[-a,a]}(s_n,s)=\sup_{x\in[-a,a]}\frac{|x|^n}{|1-x|}=\frac{a^n}{1-a}\to 0.$$

Εφαρμόζοντας στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ τα διάφορα θεωρήματα που αποδείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους παίρνουμε ανάλογα θεωρήματα για τις σειρές συναρτήσεων. Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα:

Θεώρημα 5.1.3 *Αν* $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *στο* E*, τότε* $s \overset{\sigma}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Θεώρημα 5.1.4 (Κριτήριο Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση) *Η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα προς κάποια συνάρτηση στο* E *αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon>0$*, υπάρχει* $n_o\in\mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big|<\varepsilon,\ \ \forall n\ge n_o,\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in E. \tag{5.1}$$

Απόδειξη.
Έστω $\{s_n\}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Εξ ορισμού η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν και μόνο αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. Από το κριτήριο Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων (Θεώρημα 4.3.14), η $\{s_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\forall n\ge n_o,\quad \forall p\in\mathbb{N},\quad \forall x\in E,\qquad |s_{n+p}(x)-s_n(x)|<\varepsilon.$$

Όμως

$$s_{n+p}(x)-s_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(x)$$

κι επομένως το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 5.1.5 *Αν οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο $x_o \in E$ και $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ στο E, τότε η s είναι συνεχής στο x_o.*

Απόδειξη.
Το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.4.1. □

Θεώρημα 5.1.6 *Αν οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και $s \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ στο $[a, b]$, τότε*

$$\int_a^b s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Απόδειξη.
Έστω $\{s_n\}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Από την υπόθεση, $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο $[a, b]$. Επειδή όλες οι f_n είναι συνεχείς στο $[a, b]$, και η $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ θα είναι συνεχής στο $[a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λόγω τού Θεωρήματος 4.4.1, η s είναι συνεχής στο $[a, b]$, (άρα και ολοκληρώσιμη). Τώρα το Θεώρημα 4.6.2 και η γραμμικότητα τού ολοκληρώματος δίνουν

$$\int_a^b s = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

□

Θεώρημα 5.1.7 *Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Όλες οι f_n έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$.*
(β) *Η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ συγκλίνει για ένα τουλάχιστο $x_o \in [a, b]$.*
(γ) *Η σειρά των παραγώγων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$.*
Τότε:
(i) *η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ πρός μιά συνάρτηση s.*
(ii) *Η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.*
(iii) *$s' \overset{o\mu}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Απόδειξη.
Το θεώρημα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.7.4. □

5.2 Το κριτήριο τού Weierstrass

Το κριτήριο τού Weierstrass είναι το σημαντικότερο κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης για σειρές συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.2.1 (Κριτήριο τού Weierstrass) *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων στο $E \subset \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \ \forall x \in E, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει

$$(5.2) \quad \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k, \ \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$(5.3) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon, \ \forall n \geq n_o, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Από τις (5.2) και (5.3) προκύπτει ότι

$$(5.4) \qquad \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon, \ \forall x \in E, \forall n \geq n_o, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Λόγω του κριτηρίου Cauchy (Θεώρημα 5.1.4), η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. □

Παράδειγμα 5.2.2 Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$(5.5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

Ισχύει

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο τού Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά (5.5) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ προς μιά συνάρτηση s.

Η αντίστοιχη σειρά των παραγώγων είναι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}. \tag{5.6}$$

Κι αυτή από το κριτήριο τού Weierstrass συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Οι σειρές (5.5) και (5.6) ικανοποιούν τις υποθέσεις τού Θεωρήματος 5.1.7 για κάθε διάστημα $[a, b]$. Επομένως η συνάρτηση s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \quad x \in [a, b].$$

Επειδή το $[a, b]$ είναι οποιοδήποτε διάστημα, η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.2.3 Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{2n+1} \text{ ή } \frac{1}{2n-1} \le x \le 1, \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } x = \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

και η f_n ορίζεται γραμμικά και συνεχώς σε καθένα από τα διαστήματα $[1/(2n+1), 1/(2n)]$ και $[1/(2n), 1/(2n-1)]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sup\{f_n(x) : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n}.$$

Άρα το κριτήριο τού Weierstrass δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Θα δείξουμε ότι παρόλα αυτά η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Έστω $x \in [0, 1]$. Τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός $m = m(x)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2m+1} \le x < \frac{1}{2m-1}.$$

Έτσι για $n \neq m$, $f_n(x) = 0$. Άρα η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ έχει μόνο ένα μη μηδενικό όρο και επομένως συγκλίνει. Συνεπώς η δοθείσα σειρά συναρτήσεων συγκλίνει σημειακά στο $[0, 1]$ προς μιά συνάρτηση s. Έστω $\{s_n\}$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Ισχύει

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{[0,1]}(s_n, s) &= \sup_{x\in[0,1]} (s(x) - s_n(x)) = \sup_{x\in[0,1]} ((f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots) \\ &= \sup_{x\in[0,1]} f_{n+1}(x) = f_{n+1}\left(\frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{n+1} \to 0. \qquad (5.7) \end{aligned}$$

Άρα $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο $[0, 1]$.

5.3 $*$ Τα κριτήρια των Abel και Dirichlet

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε δύο ακόμη κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης για σειρές συναρτήσεων. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα που οφείλεται στον Abel.

Λήμμα 5.3.1 (Άθροιση κατά μέρη) *Δίνονται δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$. Θέτουμε*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ \text{ για } \ n \in \mathbb{N} \quad \text{ και } \quad s_0 = 0.$$

Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $m \leq n$, τότε

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \end{aligned}$$

□

Στα δύο θεωρήματα που ακολουθούν έχουμε δύο ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ που είναι ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Με $\{s_n\}$ συμβολίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων με

$$s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x), \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ x \in E.$$

Θεώρημα 5.3.2 (Κριτήριο τού Abel) *Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο E, (δηλαδή η $\{s_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E).*
(β) *Η $\{g_n\}$ είναι μονότονη στο E.*
(γ) *Η $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.*
Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_n f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{g_n\}$ είναι φθίνουσα· (αν είναι αύξουσα, η

απόδειξη είναι παρόμοια). Λόγω της υπόθεσης (γ), υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g_n(x)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E. \tag{5.8}$$

Από την υπόθεση (α), υπάρχει συνάρτηση s τέτοια ώστε $s_n \xrightarrow{o\mu} s$ στο E. Θέτουμε $s_n^* = s_n - s$. Η ακολουθία s_n^* συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη μηδενική συνάρτηση. Άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|s_n^*(x)| < \frac{1}{4M}, \quad n \geq N, \quad x \in E. \tag{5.9}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.8), (5.9) και το Λήμμα 5.3.1 βρίσκουμε ότι για $N < m < n$ και $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)g_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + s_n(x)g_n(x) - s_{m-1}(x)g_m(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k^*(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + s_n^*(x)g_n(x) - s_{m-1}^*(x)g_m(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k^*(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + |s_n^*(x)|g_n(x) + |s_{m-1}^*(x)|g_m(x) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M}\left(g_m(x) - g_n(x) + |g_n(x)| + |g_m(x)|\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M}\, 4M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο τού Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση (Θεώρημα 1.4.3) προκύπτει ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_n f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. □

Θεώρημα 5.3.3 (Κριτήριο τού Dirichlet) *Υποθέτουμε ότι:*
(α) *Η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.*
(β) *Η $\{g_n\}$ είναι μονότονη στο E.*
(γ) *Η $\{g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη μηδενική συνάρτηση.*
Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_n f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη.
Έστω $\varepsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{g_n\}$ είναι φθίνουσα· (αν είναι αύξουσα, η απόδειξη είναι παρόμοια). Λόγω και της υπόθεσης (γ), υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) < \frac{1}{2M}, \quad n \geq N, \quad x \in E. \tag{5.10}$$

Λόγω της υπόθεσης (α), υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|s_n(x)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in E. \tag{5.11}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.10), (5.11) και το Λήμμα 5.3.1 βρίσκουμε ότι για $N < m < n$ και $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=m}^{n-1} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + s_n(x)g_n(x) - s_{m-1}(x)g_m(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + |s_n(x)|g_n(x) + |s_{m-1}(x)|g_m(x) \\
&\leq M \left(\sum_{k=m}^{n-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_n(x) + g_m(x) \right) \\
&= 2Mg_m(x) \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο τού Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση (Θεώρημα 1.4.3) προκύπτει ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_n f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E. □

Τα κριτήρια των Abel και Dirichlet εφαρμόζονται σε σειρές συναρτήσεων της μορφής $\sum_n f_n g_n$. Φυσικά, κάθε σειρά συναρτήσεων $\sum_n F_n$ μπορεί να γραφεί με πολλούς τρόπους στην παραπάνω μορφή. Για να εφαρμόσουμε λοιπόν τα κριτήρια με επιτυχία, πρέπει να κάνουμε την κατάλληλη παραγοντοποίηση $F_n = f_n g_n$. Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής των κριτηρίων.

Παράδειγμα 5.3.4 Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 x + n}, \quad x \in [0, \infty).$$

Για $a > 0$, ισχύει

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 x + n} \right| \leq \frac{1}{an^2}, \quad \forall x \in [a, \infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι το κριτήριο τού Weierstrass δίνει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$. Επειδή το a είναι τυχαίος θετικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει σημειακά στο $(0, \infty)$. Η σειρά συγκλίνει και για $x = 0$.

Θα δούμε τώρα με χρήση τού κριτηρίου τού Abel ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Θέτουμε

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n},\quad g_n(x)=\frac{1}{nx+1},\qquad x\in[0,\infty),\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά των σταθερών συναρτήσεων $\sum_n f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Επίσης η $\{g_n\}$ είναι φθίνουσα και ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων στο $[0,\infty)$. Έτσι το κριτήριο τού Abel εφαρμόζεται και δίνει την ομοιόμορφη σύγκλιση της αρχικής σειράς στο $[0,\infty)$.

Μπορούμε να δείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς και με χρήση του κριτηρίου τού Dirichlet θέτοντας $\phi_n(x)=(-1)^n$ και $\psi_n(x)=1/(n^2x+n)$.

Θέτουμε

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2x+n},\ \ x\in[0,\infty).$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Άρα

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2x+n}=\lim_{x\to 0+}h(x)=h(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Παράδειγμα 5.3.5 Έστω $\{b_n\}$ μια φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim b_n=0$. Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ \ x\in[-1,1-\delta],$$

όπου $0<\delta<2$. Παρατηρούμε ότι για $n\geq 0$ και $x\in[-1,1-\delta]$, ισχύει

$$\left|\sum_{k=0}^{n}x^k\right|=\left|\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right|\leq\frac{2}{|x-1|}\leq\frac{2}{\delta}.$$

Έτσι από το κριτήριο τού Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1,1-\delta]$.

Παράδειγμα 5.3.6 Έστω $\{b_n\}$ μια φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim b_n=0$. Θεωρούμε την σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos(nx),\qquad x\in[\delta,2\pi-\delta],$$

όπου $0 < \delta < \pi$. Με χρήση της ταυτότητας

$$2\cos(kx)\sin\frac{x}{2} = \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)$$

αποδεικνύεται εύκολα ότι για $x \in (0, 2\pi)$,

$$\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin(nx + x/2) - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Επομένως για $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$|\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)| \leq \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{1}{\sin(\delta/2)}.$$

Έτσι από το κριτήριο τού Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Παράδειγμα 5.3.7 Είναι γνωστο από το Λογισμό ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \quad x \in (-1, 1). \tag{5.12}$$

Από το Παράδειγμα 5.3.5, η παραπάνω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1, 1-\delta]$ για κάθε $\delta \in (0, 2)$. Επομένως ορίζει μια συνεχή συνάρτηση στο $[-1, 1)$. Λόγω συνέχειας, η ισότητα (5.12) ισχύει για κάθε $x \in [-1, 1)$. Για $x = -1$ προκύπτει η ισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2. \tag{5.13}$$

Παράδειγμα 5.3.8 (Οριακό θεώρημα τού Abel) Έστω $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο τού Abel προκύπτει ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ και έτσι ορίζει μιά συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Άρα

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Παρατήρηση 5.3.9 Διατυπώσαμε τα κριτήρια των Abel και Dirichlet για ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$. Η ειδική περίπτωση μία ή και οι δύο από τις ακολουθίες να είναι ακολουθίες αριθμών είναι σημαντική· τα κριτήρια εφαρμόζονται λοιπόν και για σειρές τις μορφής $\sum_n a_n f_n$ ή $\sum_n a_n b_n$, όπου $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.3.10 Το κριτήριο γιά εναλλάσσουσες σειρές (Θεώρημα 2.2.13) προκύπτει άμεσα από το κριτήριο τού Dirichlet.

5.4 Δυναμοσειρές

Οι δυναμοσειρές είναι μιά σημαντική κατηγορία σειρών συναρτήσεων.

Ορισμός 5.4.1 *Αν $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ είναι μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_o \in \mathbb{R}$, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_o)^k$ ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο x_o και συντελεστές a_k.*

Θεώρημα 5.4.2 *Δίνεται μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ και ένα $x_o \in \mathbb{R}$. Θέτουμε*

$$R = \left(\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}.$$

(α) Η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_o)^k$ συγκλίνει σημειακά και απολύτως στο $(x_o - R, x_o + R)$.
(β) Αν $x \notin [x_o - R, x_o + R]$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_o)^k$ δεν συγκλίνει.
(γ) Η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_o)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $[a, b] \subset (x_o - R, x_o + R)$.

Απόδειξη.
(α) Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας: Αν $|x - x_o| < R$, τότε

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k (x - x_o)^k|} = |x - x_o| \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x - x_o|}{R} < 1.$$

(β) Αν $|x - x_o| > R$, τότε όπως στο (α),

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k (x - x_o)^k|} = \frac{|x - x_o|}{R} > 1.$$

(γ) Αν $x \in [a,b]$, τότε $|x - x_o| \leq \max\{|a|,|b|\} < R$. Διαλέγουμε r με $\max\{|a|,|b|\} < r < R$. Τότε

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{r}, \quad \forall k \geq n_o.$$

Επομένως

$$|a_k(x - x_o|^k| \leq \frac{|x - x_o|^k}{r^k} \leq \left(\frac{\max\{|a|,|b|\}}{r}\right)^k, \quad \forall k \geq n_o.$$

Επειδή $\max\{|a|,|b|\} < r$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\max\{|a|,|b|\}}{r}\right)^k$ συγκλίνει. Άρα από το κριτήριο τού Weierstrass η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_o)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. □

Ορισμός 5.4.3 *Ο αριθμός*

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1}.$$

ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_o)^k$ και το διάστημα $(-R,R)$ ονομάζεται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Λόγω του Θεωρήματος 5.4.2, κάθε δυναμοσειρά ορίζει μιά συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της.

5.5 ∗ Μιά συνεχής, πουθενά παραγωγίσιμη συνάρτηση

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο τού $\mathbb{R}$. Ο πρώτος που κατασκεύασε τέτοια συνάρτηση ήταν ο Weierstrass.

Θεώρημα 5.5.1 *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο τού $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]. \tag{5.14}$$

Επεκτείνουμε τη ϕ στο $\mathbb{R}$ θέτοντας

$$\phi(x+2) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.15}$$

Έτσι έχουμε ορίσει μιά συνεχή περιοδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με περίοδο 2. Για τη ϕ ισχύει

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.16}$$

Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.17}$$

Λόγω τού Θεωρήματος 5.2.1, η παραπάνω σειρά συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και επόμένως η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε τώρα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x. Αρκεί να βρούμε μιά ακολουθία $\delta_m \to 0$ τέτοια ώστε η ακολουθία

$$\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}$$

να μή συγκλίνει, όταν $m \to \infty$.

Θεωρούμε την ακολουθία

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2}\,\frac{1}{4^m}, \ \ m \in \mathbb{N}, \tag{5.18}$$

όπου το πρόσημο επιλέγεται έτσι ώστε κανένας ακέραιος να μην είναι ανάμεσα στο $4^m x$ και στο $4^m(x+\delta_m)$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε διότι $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε

$$s_{n,m} = \frac{\phi(4^n(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m} \tag{5.19}$$

και παρατηρούμε ότι
(α) $s_{n,m} = 0$ όταν $n > m$ (ο $4^m\delta_m$ είναι άρτιος ακέραιος σε αυτή την περίπτωση),

(β) $|s_{n,m}| \leq 4^n$ όταν $n = 0, 1, \ldots, m$ (λόγω της (5.16)),
(γ) $|s_{m,m}| = 4^m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Τελικά λοιπόν έχουμε

$$\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n s_{n,m}\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1).$$

□

5.6 ∗ Μιά χωροπληρωτική καμπύλη

Μιά συνεχής συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **επίπεδη καμπύλη**. Αν $F([a, b]) = [0, 1] \times [0, 1]$, δηλαδή αν η καμπύλη γεμίζει το τετράγωνο $Q := [0, 1] \times [0, 1]$, τότε είναι *χωροπληρωτική καμπύλη*. Θα κατασκευάσουμε μια τέτοια καμπύλη.

Ορίζουμε συνάρτηση $\phi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{5}{3}, 2], \\ 3t - 1, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}], \\ -3t + 5, & t \in [\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]. \end{cases}$$

Επεκτείνουμε τη ϕ στο $\mathbb{R}$ θέτοντας

$$\phi(t + 2) = \phi(t).$$

Η ϕ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο 2, έχει μέγιστο 1 και ελάχιστο 0. Σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}t)}{2^n}$$

Από το κριτήριο τού Weierstrass οι παρπάνω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Άρα οι συναρτήσεις x, y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την καμπύλη $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ με $F(t) = (x(t), y(t))$. Θα δείξουμε ότι $F([0, 1]) = Q$. Είναι φανερό ότι $F([0, 1] \subset Q$. Αντιστρόφως, έστω $(a, b) \in Q$. Θεωρούμε τις μη τερματιζόμενες δυαδικές παραστάσεις των a, b:

$$a = 0._2 a_1 a_2 \ldots, \qquad b = 0._2 b_1 b_2 \ldots$$

με $a_j, b_j \in \{0,1\}$. Θεωρούμε τον αριθμό c με τριαδική παράσταση

$$c = 0._3(2c_1)(2c_2)\ldots,$$

όπου $c_{2n-1} = a_n$ και $c_{2n} = b_n$, $n = 1,2,\ldots$. Δηλαδή

$$c = 0._3(2a_1)(2b_1)(2a_2)(2b_2)\ldots$$

Επειδή $3\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 1$, ισχύει $c \in [0,1]$. Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\phi(3^k c) = c_{k+1}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{5.20}$$

Ισχύει

$$\begin{aligned} 3^k\, c &= 3^k\, 0._3(2c_1)(2c_2)\cdots = 3^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{k} \frac{c_n}{3^{n-k}} + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} \\ &= (\text{άρτιος αριθμός}) + d_k, \end{aligned}$$

όπου

$$d_k = 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}.$$

Επειδή η ϕ έχει περίοδο 2, ισχύει $\phi(3^k\, c) = \phi(d_k)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $c_{k+1} = 0$, τότε $0 \le d_k \le 2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3}$. Από το ορισμό τής ϕ έπεται ότι $\phi(d_k) = 0 = c_{k+1}$ και η (5.20) αποδείχθηκε σε αυτή την περίπτωση.

(β) Αν $c_{k+1} = 1$, τότε $\frac{2}{3} \le d_k \le 1$. Άρα $\phi(d_k) = 1 = c_{k+1}$.

Έτσι λοιπόν αποδείξαμε την (5.20) η οποία τώρα δίνει άμεσα ότι

$$\phi(3^{2n-2}c) = c_{2n-1} = a_n \quad \text{και} \quad \phi(3^{2n-1}c) = c_{2n} = b_n.$$

Άρα $x(c) = a$ και $y(c) = b$, δηλαδή $F(c) = (a,b)$. Επομένως η καμπύλη F είναι χωροπληρωτική.

5.7 Ασκήσεις

5.7.1 Βρείτε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο οι παρακάτω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν σημειακά.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + x^n}{1+3^n x^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^x, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^{\log n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(2\pi\sqrt{n^2+x^2}).$$

5.7.2 Μελετήστε τις παρακάτω σειρές συναρτήσεων ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στο σύνολο A.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^2(1+x^2))\right), \quad A=\mathbb{R}, \\
\text{(b)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(1+nx)}{nx^n}, \quad A=[2,\infty), \\
\text{(c)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^2e^{-n^2|x|}, \quad A=\mathbb{R}, \\
\text{(d)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2(1-x^2)^{n-1}, \quad A=[-1,1], \\
\text{(e)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \quad A=\{x\in\mathbb{R}:1/2\le|x|\le 2\}, \\
\text{(f)} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}, \quad A=(0,\infty), \\
\text{(g)} & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right), \quad A=(-a,a),\ a>0.
\end{array}
$$

5.7.3 Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$$

συγκλίνει σημειακά στο $[0,\infty)$ και βρείτε τη συνάρτηση-όριο.

5.7.4 Εξετάστε τη σύγκλιση (απόλυτη, σημειακή, και ομοιόμορφη) των παρακάτω σειρών συναρτήσεων και μελετήστε τη συνέχεια των συναρτήσεων στις οποίες συγκλίνουν.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\sin(nx)}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n2^nx^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\log^n(x+1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|x|^{\sqrt{n}}.$$

5.7.5 Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ προς μιά συνεχή συνάρτηση.

5.7.6 Υποθέτουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.
(α) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} gf_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.
(β) Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι η υπόθεση πως η g είναι φραγμένη είναι απαραίτητη για το (α).
(γ) Τι πρέπει να υποθέσουμε για τη συνάρτηση h ώστε η οοιόμορφη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} hf_n$ να συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ στο A;

5.7.7 Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ συγκλίνει σημειακά στο A προς μιά φραγμένη συνάρτηση και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ συγκλίνει ο-μοιόμορφα στο A.
Υπόδειξη: Cauchy-Schwarz.

5.7.8 Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3x-1)^n}{n}.$$

Βρείτε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο αυτή συγκλίνει απολύτως και το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο συγκλίνει σημειακά. Δείξτε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[1/6, 1/3]$.

5.7.9 Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+1}{x}\right)^n.$$

Βρείτε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο αυτή συγκλίνει απολύτως και το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο συγκλίνει σημειακά. Δείξτε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-2, -1]$.

5.7.10 (α) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to (0, \infty),\ n \in \mathbb{N}$ είναι όλες συνεχείς και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1)$. Δείξτε ότι η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ είναι συγκλίνουσα.
(β) Βρείτε το μεγαλύτερο σύνολο A στο οποίο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\cos(nx)$ συγκλίνει σημειακά. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο A;

5.7.11 (α) Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο του κριτηρίου του Dini (Θεώρημα 4.4.4) για σειρές συναρτήσεων.
(β) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f_n : [a, b] \to (0, \infty),\ n \in \mathbb{N}$ είναι όλες συνεχείς και ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σημειακά προς μιά συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$. Δείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[a, b]$.

5.7.12 Δίνεται η σειρά συναρτήσεων
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$
Βρείτε τα σύνολα στα οποία συγκλίνει σημειακά και ομοιόμορφα. Εξετάστε αν η συνάρτηση-όριο είναι συνεχής και φραγμένη.

5.7.13 Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{x^2+n}{n^2}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα.

5.7.14 Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

5.7.15 Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}.$$

5.7.16 Αποδείξτε ότι αν $\alpha > \frac{1}{2}$, η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,b]$. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$;

5.7.17 (α) Για ποιά x η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει; Σε ποιά διαστήματα είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;
(β) Δείξτε ότι
$$\int_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\, dx = \frac{e}{e^2-1}.$$

5.7.18* Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής: Θέτουμε $f_1(0) = 0$, $f_1(1/3) = 1/2 = f(2/3)$, $f_1(1) = 1$ και στη συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά στα διαστήματα $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$.
Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής: Θέτουμε $f_2(x) = f_1(x)$ για $x = 0, 1/3, 2/3, 1$ και $f_2(1/9) = 1/4 = f_2(2/9)$, $f_2(7/9) = 3/4 = f(8/9)$ και

στη συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά στα διαστήματα $[0,1/9]$, $[1/9,2/9]$, $[2/9,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,7/9]$, $[7/9,8/9]$, $[8/9,1]$.
Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$.
(α) Δείξτε ότι

$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(β) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$f_1+\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1}-f_n)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ προς τη συνάρτηση τού Cantor.

5.7.19 Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,\infty)$ για κάθε $a>0$. Δείξτε επίσης ότι η παραπάνω σειρά συγκλίνει σημειακά αλλά όχι ομοιόμορφα στο $(0,\infty)$.

5.7.20 Δίνεται ακολουθία $\{a_n\}$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Δείξτε επίσης ότι

$$\lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

5.7.21 Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{ne^{nx}},\quad x\in[0,1].$$

5.7.22 Δείξτε ότι οι παρακάτω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στο σύνολο A.

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \qquad A=[0,1],$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}, \qquad A=[\delta,2\pi-\delta],\ \ 0<\delta<\pi,$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)\sin(nx)}{n+x^2}, \qquad A=\mathbb{R},$$

$$\text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \qquad A=[0,\infty),$$

$$\text{(e)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\arctan(nx), \qquad A=\mathbb{R},$$

$$\text{(f)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(x/n)}{\sqrt{n}+\cos x}, \qquad A=[-a,a],\ \ a>0,$$

$$\text{(g)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \qquad A=[0,\infty).$$

5.7.23 Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f_n,\ n\in\mathbb{N}$ είναι όλες συνεχείς στο σύνολο A και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A. Δείξτε ότι αν το $x_o\in A$ είναι σημείο συσσώρευσης τού A, τότε

$$\lim_{x\to x_o}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o).$$

5.7.24 Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητ-ες:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\log 2,$$

$$\text{(b)}\quad \lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}=\log 2,$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=1,$$

$$\text{(d)}\quad \lim_{x\to 0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=1,$$

$$\text{(e)}\quad \lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

5.7.25* Δίνονται ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ ορισμένες στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Υποθέτουμε ότι:
(α) Η $\{s_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο E.
(β) Η $\sum_n |g_n - g_{n+1}|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.
(γ) Η $\{g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E προς τη μηδενική συνάρτηση.
Δείξτε ότι η $\sum_n f_n g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E.

5.7.26* Δίνεται φθίνουσα ακολουθία $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, \infty)$ τέτοια ώστε $\sum_n b_n = \infty$. Δείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta) \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\theta)$$

συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως για κάθε $\theta \neq k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
Υπόδειξη: Αν $\sum_n b_n |\cos(n\theta)| < \infty$, τότε

$$\frac{1}{2} \sum_n b_n (1 + \cos(2n\theta)) = \sum_n b_n \cos^2(n\theta) < \infty.$$

5.7.27 Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ αποκλίνει.

5.7.28 Δείξτε ότι

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{(\log n)^2} < \infty.$$

5.7.29* Βρείτε ακολουθία συναρτήσεων f_n στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ να συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ να μήν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

5.7.30* Υποθέτουμε ότι:
(α) Οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι όλες μονότονες στο $[a, b]$.
(β) Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(a)|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(b)|$ συγκλίνουν.
Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

5.7.31 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5.7.32 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\pi/6, 11\pi/6]$.

5.7.33 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx^2)}{n^3+1}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

5.7.34 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (\tan x)^n$ έχει συνεχή παράγωγο στο $(-\pi/4, \pi/4)$.

5.7.35 Δείξτε ότι η συνάρτηση ζήτα τού Riemann

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(1,\infty)$.

5.7.36 Βρείτε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο οι παρακάτω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν σημειακά.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^nx^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}2^nx^{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}2^{n^2}x^{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{2^nn^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n4^n}{3^n}x^n(1-x)^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(\tan x)^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^{n^2}.$$

5.7.37 Δίνεται μιά δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_o)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_o)^k,\quad x\in(x_o-R,x_o+R).$$

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο (x_o-R,x_o+R).
(β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_o-R,x_o+R) και μάλιστα η παράγωγός της υπολογίζεται με παραγώγιση της δυναμοσειράς όρο προς όρο, δηλαδή

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(x-x_o)^{k-1},\quad x\in(x_o-R,x_o+R).$$

(γ) Αν $[a,b]\subset(x_o-R,x_o+R)$, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατα Riemann στο $[a,b]$ και μάλιστα το ολοκλήρωμά της υπολογίζεται με ολοκλήρωση της δυναμοσειράς όρο προς όρο, δηλαδή

$$\int_a^b f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}\left((b-x_o)^{k+1}-(a-x_o)^{k+1}\right).$$

5.7.38 Δίνεται μιά δυναμοσειρά $f(x):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_o)^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Δείξτε ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$, ισχύει $f^{(k)}(x_o)=k!a_k$.

5.7.39 Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ έχουν ακτίνες σύγκλισης R_1, R_2, αντίστοιχα.
(α) Δείξτε ότι αν $R_1 \neq R_2$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$. Τι συμβαίνει αν $R_1 = R_2$;
(β) Δείξτε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R_4 \geq R_1 R_2$. Δείξτε με παράδειγμα ότι η ανισότητα μπορεί να είναι αυστηρή.

5.7.40 Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R με $0 < R < \infty$. Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n.$$

5.7.41 Δείξτε ότι αν μιά δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε είναι πολυώνυμο.
Υπόδειξη: Άσκηση 4.8.20.

5.7.42 Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

και δείξτε ότι το άθροισμά της f ικανοποιεί την εξίσωση $f'(x) = 1 + xf(x)$, $x \in (-R, R)$.

5.7.43 Δείξτε ότι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

συγκλίνει σημειακά στο $\mathbb{R}$ και ότι το άθροισμά της f ικανοποιεί την εξίσωση $f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5.8 Σημειώσεις

Το κριτήριο τού Weierstrass για τη σύγκλιση σειρών αναφέρεται συχνά ως Weierstrass M-test. Δίνει εκτός της ομοιόμορφης και απόλυτη σύγκλιση της σειράς. Για σειρές συναρτήσεων που δεν συγκλίνουν απολύτως χρησιμοποιούνται συνήθως τα κριτήρια των Abel και Dirichlet. Τα κριτήρια αυτά οφείλονται κυρίως στον ιδιοφυή Νορβηγό μαθηματικό N.Abel. Ο τύπος της άθροισης κατά μέρη ανακαλύφθηκε από τον Abel το 1826. Για την παρουσίαση των κριτηρίων των Abel και Dirichlet και τις εφαρμογές τους χρησιμοποιήσαμε κυρίως τα βιβλία [5] και [10]. Στα [1], [10] υπάρχουν περισσότερα για τη θεωρία των δυναμοσειρών.

Οι τριγωνομετρικές σειρές είναι οι σειρές συναρτήσεων της μορφής

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$. Η μελέτη αυτών των σειρών αποτελεί μέρος ενός ευρύτατου και σημαντικού κλάδου της ανάλυσης που ονομάζεται *Ανάλυση Fourier*. Για μιά εισαγωγή στην Ανάλυση Fourier παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [5] και [6].

Το πρώτο παράδειγμα πουθενά παραγωγίσιμης, συνεχούς συνάρτησης δημοσιεύτηκε από τον Weierstrass. Ιστορική επισκόπηση τέτοιου είδους παραδειγμάτων υπάρχει στο βιβλίο [E.W.Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable*, 2 vols., Cambridge Univ. Press, 1927] και στο άρθρο [G.H.Hardy, *Weierstrass' non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 301-325].

Ο πρώτος που κατασκεύασε μια χωροπληρωτική καμπύλη ήταν ο G.Peano το 1890. Το παράδειγμα που παραθέτουμε είναι τού I.J.Schoenberg, [*The Peano curve of Lebesgue*, Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 519],] ο οποίος τροποποίησε ένα προηγούμενο παράδειγμα τού H.Lebesgue. Άλλα παραδείγματα χωροπληρωτικών καμπυλών, καθώς και σχετικές κατασκευές υπάρχουν στα ακόλουθα άρθρα: [J.Holbrook, *Stochastic independence and space-filling curves*, Amer. Math. Monthly 88 (1991), 426-432], [T.Lance and E.Thomas, *Arcs with positive measure and a space-filling curve*, Amer. Math. Monthly 98 (1991), 124-127], [E.H.Moore, *On certain crinkly curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 72-90, 507], [H.Sagan, *Approximating polygons for Lebesgue's and Schoenberg's space filling curves*, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 361-368], [H.Sagan, *An elementary proof that Schoenberg's space filling curve is nowhere differentiable*, Math. Magazine 65 (1992), 125-128], [W.C.Swift, *Simple constructions of non-differentiable functions and space-filling curves*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 653-655], [L.Wen, *A space-filling curve*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 283], [G.T.Whyborn, *What is a curve?*, Amer. Math. Monthly 49 (1942), 493-497].

Κεφάλαιο 6

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων

Έστω E ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Με $C(E)$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}$, ενώ με $B(E)$ συμβολίζουμε το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}$. Αν το E είναι συμπαγές, τότε ισχύει $C(E) \subset B(E)$. Για $f \in B(E)$, ορίζουμε $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : B(E) \to [0, \infty)$ είναι μιά νόρμα στο $B(E)$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο χώρος $C[a, b]$, όπου $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε κυρίως τα εξής ερωτήματα:

1. Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Κάτω από ποιές συνθήκες μιά ακολουθία συναρτήσεων τού $C(K)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα; Το ερώτημα αυτό σχετίζεται με την έννοια της ισοσυνέχειας που εισάγεται στην παράγραφο 6.1.
2. Είναι το σύνολο των πολυωνύμων πυκνό μέσα στο $C[a, b]$; Με άλλα λόγια: μπορούμε για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[a, b]$ να βρούμε μιά ακολουθία πολυωνύμων που να συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f; Όπως θα δούμε στην παραγραφο 6.3, η απάντηση είναι θετική και οφείλεται στο Weierstrass.

Διάφορες άλλες ιδιότητες των χώρων $C(E)$ και $B(E)$ παρουσιάζονται στις ασκήσεις.

6.1 Ισοσυνέχεια. Το Θεώρημα Arzelà-Ascoli

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ισχύει κάτι ανάλογο για ακολουθίες συναρτήσεων;

Παράδειγμα 6.1.1 Έστω

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \ \ x \in [0, 1], \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $|f_n(x)| \leq 1$ κι επομένως η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, 1]$. Επίσης $f_n \xrightarrow{\sigma} 0$ στο $[0, 1]$. Όμως $f_n(1/n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα καμιά υπακολουθία της $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι χρειάζεται κάποια επιπλέον υπόθεση πού να εξασφαλίζει την ύπαρξη ομοιόμορφα συγκλίνουσας υπακολουθίας.

Ορισμός 6.1.2 Έστω $\mathcal{F}$ μιά οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων. Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται **σημειακά φραγμένη** στο $E \subset \mathbb{R}$ αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq \varphi(x), \ \ \forall x \in E, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται **ομοιόμορφα φραγμένη** στο E αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \leq M, \ \ \forall x \in E, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Ορισμός 6.1.3 Έστω E ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Μιά οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F}$ ονομάζεται **ισοσυνεχής** στο E αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F}, \ \forall x, y \in E \ \text{ με } |x - y| < \delta, \ \text{ισχύει} \ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Παράδειγμα 6.1.4 Έστω $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Προφανώς η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, 1]$. Η $\mathcal{F}$ δεν είναι ισοσυνεχής στο $[0, 1]$. Πράγματι, έστω $x \in [0, 1)$. Διαλέγουμε n αρκούντως μεγάλο ώστε $x^n < 1/2$. Τότε $|f_n(1) - f_n(x)| = 1 - x^n > 1/2$, δηλαδή δεν ισχύει η (6.1).

Η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο $[0, a]$ για οποιοδήποτε a με $0 < a < 1$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Γιά $x, y \in [0, a]$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= |x^n - y^n| \\ &= |x - y| \, |y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}| \\ &\leq |x - y| n a^{n-1}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} n a^{n-1} = 0$. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $n a^{n-1} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon / M$ και η (6.2) συνεπάγεται ότι αν $|x - y| < \delta$, τότε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Παράδειγμα 6.1.5 Γιά $0 < K < \infty$ και $0 < \alpha \le 1$, ορίζουμε

$$\mathrm{Lip}(K,\alpha) = \{f \in C[0,1] : |f(x) - f(y)| \le K|x-y|^{\alpha},\ \forall x, y \in [0,1]\}.$$

Η οικογένεια συναρτήσεων $\mathrm{Lip}(K,\alpha)$ είναι ισοσυνεχής, διότι αν $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ και τότε γιά $|x-y| < \delta$, ισχύει $\forall f \in \mathrm{Lip}(K,\alpha)$, $|f(x)-f(y)| < K\delta^{\alpha} = \varepsilon$. Η $\mathrm{Lip}(K,\alpha)$ δεν είναι ούτε σημειακά, ούτε ομοιόμορφα φραγμένη διότι περιέχει όλες τις σταθερές συναρτήσεις. Επειδή $|f(x)| \le |f(0)|+K$, $\forall f \in \mathrm{Lip}(K,\alpha)$, $\forall x \in [0,1]$, η υπο-οικογένεια συναρτήσεων

$$\mathrm{Lip}_o(K,\alpha) := \{f \in \mathrm{Lip}(K,\alpha) : f(0) = 1\}$$

είναι σημειακά φραγμένη στο $[0,1]$.

Θεώρημα 6.1.6 *Αν E είναι ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F}$ είναι μιά οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων, σημειακά φραγμένη στο E, τότε κάθε ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σημειακά στο E.*
Απόδειξη.
Υποθέτουμε ότι το E είναι αριθμήσιμο. (Η απόδειξη για πεπερασμένο E είναι πιό εύκολη). Έστω ότι $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Η ακολουθία (αριθμών) $\{f_n(x_1)\}$ είναι φραγμένη· άρα η $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία $\{f_{1,k}\}$ τέτοια ώστε η $\{f_{1,k}(x_1)\}$ είναι συγκλίνουσα. Η $\{f_{1,k}(x_2)\}$ είναι φραγμένη· άρα η $\{f_{1,k}\}$ έχει υπακολουθία $\{f_{2,k}\}$ τέτοια ώστε η $\{f_{2,k}(x_2)\}$ είναι συγκλίνουσα. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε αριθμησίμου πλήθους ακολουθίες συναρτήσεων S_n, $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{array}{lcl}
S_1 & : & f_{1,1},\ f_{1,2},\ f_{1,3},\ f_{1,4}, \dots \\
S_2 & : & f_{2,1},\ f_{2,2},\ f_{2,3},\ f_{2,4}, \dots \\
S_3 & : & f_{3,1},\ f_{3,2},\ f_{3,3},\ f_{3,4}, \dots \\
\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

που έχουν τις ιδιότητες:
(α) Η S_n είναι υπακολουθία της S_{n-1}, $n = 2, 3, \dots$.
(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\{f_{n,k}(x_n)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα.

Θεωρούμε τώρα τη διαγώνια ακολουθία $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Για οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\{f_{n,n}\}_{n=m}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της S_m· λόγω του (β), αυτό συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{f_{n,n}(x_m\}_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα. Άρα η $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σημειακά στο E. $\square$

Το θεώρημα πού ακολουθεί είναι το σημαντικότερο θεώρημα για την ισοσυνέχεια. Συνδέει την έννοια αυτή με την ομοιόμορφη σύγκλιση. Στην απόδειξή του χρειάζεται το ακόλουθο τοπολογικό αποτέλεσμα. Θυμίζουμε πρώτα ότι ένα υποσύνολο E ενός συνόλου K είναι πυκνό στο K αν $\overline{E} = K$· για παράδειγμα, το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα 6.1.7 *Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε το K έχει ένα το πολύ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Απόδειξη.
Έστω $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς ισχύει

$$K \subset \bigcup_{x \in K} \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k} \right).$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπαρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_{n_k}^{(k)}$ τέτοια ώστε

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_k} \left(x_j^{(k)} - \frac{1}{k}, x_j^{(k)} + \frac{1}{k} \right).$$

Έστω

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}\}.$$

Το E είναι το πολύ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού K. $\square$

Θεώρημα 6.1.8 (Arzelà-Ascoli) *Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αν $\mathcal{F} \subset C(K)$ είναι μια σημειακά φραγμένη και ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων, τότε*
(α) Η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο K.
(β) Κάθε ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ έχει υπακολουθία πού συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Απόδειξη.

(α) Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο K, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ και } \forall x, y \in K \text{ με } |x - y| < \delta, \text{ ισχύει } |f(x) - f(y)| < 1. \tag{6.3}$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του $p_1, p_2, \dots, p_m$ τέτοια ώστε

$$K \subset V(p_1, \delta) \cup V(p_2, \delta) \cup \dots \cup V(p_m, \delta),$$

όπου $V(p_j, \delta) = (p_j - \delta, p_j + \delta)$. Επειδή η $\mathcal{F}$ είναι σημειακά φραγμένη, υπάρχουν θετικοί αριθμοί $M_1, M_2, \dots, M_m$ τέτοιοι ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F}, \ |f(p_j)| \leq M_j, \ \ j = 1, 2, \dots, m. \tag{6.4}$$

Θέτουμε $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$. Έστω $x \in K$. Τότε $x \in V(p_j, \delta)$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ και λόγω των (6.3), (6.4), ισχύει

$$\forall f \in \mathcal{F}, \ \ |f(x)| \leq |f(p_j)| + 1 \leq M + 1.$$

Άρα η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο K.

(β) Έστω $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μιά ακολουθία τού $\mathcal{F}$ και έστω E ένα το πολύ αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο τού K (η ύπαρξη τέτοιου E εξασφαλίζεται από το Λήμμα 6.1.7). Από το Θεώρημα 6.1.6 προκύπτει ότι η $\{f_n\}$ έχει μιά υπακολουθία $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε η $\{f_{n_k}(x)\}$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in E$.

Θα δείξουμε ότι η $\{f_{n_k}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς θέτουμε $f_{n_k} = g_k$. Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω ισοσυνέχειας υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F} \text{ και } \forall x, y \in K \text{ με } |x - y| < \delta, \text{ ισχύει } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Επειδή το E είναι πυκνό μέσα στο K και το K είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$ τού E τέτοια ώστε

$$K \subset V(x_1, \delta) \cup V(x_2, \delta) \cup \cdots \cup V(x_N, \delta). \tag{6.6}$$

Η $\{g_k(x)\}$ είναι συγκλίνουσα (άρα και Cauchy) για κάθε $x \in E$, άρα και για $x = x_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$. Επομένως υπάρχουν φυσικοί k_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ τέτοιοι ώστε

$$\forall k, l \geq k_j, \ |g_k(x_j) - g_l(x_j)| < \varepsilon, \ \ j = 1, 2, \ldots, N.$$

Θέτουμε $k_o = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Τότε

$$\forall k, l \geq k_o, \ |g_k(x_j) - g_l(x_j)| < \varepsilon, \ \ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.7}$$

Έστω $x \in K$. Λόγω της (6.6), $x \in V(x_j, \delta)$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ κι επομένως η (6.5) δίνει

$$|g_k(x) - g_k(x_j)| < \varepsilon, \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

Τελικά λοιπον, αν $k, l \geq k_o$, τότε

$$|g_k(x) - g_l(x)| \leq |g_k(x) - g_k(x_j)| + |g_k(x_j) - g_l(x_j)| + |g_l(x_j) - g_l(x)| < 3\varepsilon.$$

Λόγω του κριτηρίου Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση (Θεώρημα 4.3.14), η $\{g_k\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K. $\square$

6.2 Ακολουθίες Dirac

Ορισμός 6.2.1 Μιά ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ακολουθία Dirac**, αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
($\boldsymbol{\Delta}$1) $K_n(t) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
($\boldsymbol{\Delta}$2) $K_n(t) = K_n(-t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
($\boldsymbol{\Delta}$3) $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\, dt = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
($\boldsymbol{\Delta}$4) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\, dt < \varepsilon.$$

Η συνθήκη **($\boldsymbol{\Delta}$3)** σημαίνει ότι το εμβαδό κάτω από το γράφημα της K_n είναι ίσο με 1. Η συνθήκη **($\boldsymbol{\Delta}$4)** σημαίνει ότι το εμβαδό αυτό συγκεντρώνεται κοντά στον άξονα y όσο το n αυξάνει. Είναι φανερό ότι για να αποδείξουμε την **($\boldsymbol{\Delta}$4)** αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\ dt = 0.$$

Παράδειγμα 6.2.2 (Ακολουθία Landau)
Έστω

$$K_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{c_n}, & \text{αν} \quad -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{αν} \ \ t < -1 \ \ \text{ή} \ \ t > 1. \end{cases} \tag{6.9}$$

Οι σταθερές c_n επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιείται η **($\boldsymbol{\Delta}$3)**, δηλαδή

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt.$$

Σημειώνουμε ότι επειδή η $K_n = 0$ έξω από το $[-1,1]$, ολοκληρώνουμε στο $[-1,1]$ και όχι στο $(-\infty,\infty)$. Προφανώς οι K_n είναι όλες συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις συνθήκες **($\boldsymbol{\Delta}$1)** και **($\boldsymbol{\Delta}$2)**. Μένει να αποδείξουμε τη **($\boldsymbol{\Delta}$4)**. Πρώτα βρίσκουμε ένα κάτω φράγμα για το c_n:

$$\begin{aligned} c_n &= 2\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt = 2\int_0^1 (1+t)^n\ (1-t)^n\, dt \\ &\geq 2\int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $0 < \delta < 1$ και $\varepsilon > 0$. Ισχύει:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\delta} K_n + \int_{\delta}^{1} K_n &= 2\int_{\delta}^{1} K_n = 2\int_{\delta}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{c_n}\,dt \\ &\leq \int_{\delta}^{1} (n+1)(1-\delta^2)^n\,dt \leq (n+1)(1-\delta^2)^n.\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$. Άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n \geq n_o$, $\int_{-1}^{\delta} K_n + \int_{\delta}^{1} K_n < \varepsilon$ και η $(\boldsymbol{\Delta 4})$ αποδείχθηκε.

Παράδειγμα 6.2.3 (Κανονική Κατανομή)
Έστω

$$p_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2t^2/2}. \tag{6.10}$$

Είναι προφανές ότι η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις $(\boldsymbol{\Delta 1})$ και $(\boldsymbol{\Delta 2})$. Επίσης με την αλλαγή μεταβλητής $u = nt/\sqrt{2}$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = 1$$

κι επομένως ισχύει και η $(\boldsymbol{\Delta 3})$. Για να αποδείξουμε την $(\boldsymbol{\Delta 4})$ χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα.
Λήμμα: Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $M > 0$,

$$\int_{M}^{\infty} e^{-u^2}\,du \leq C\,e^{-M^2}.$$

Απόδειξη τού λήμματος: Θέτουμε $g(M) = \int_M^{\infty} e^{-u^2}\,du$, $M \geq 0$. Γράφοντας $g(M) = \int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du - \int_0^M e^{-u^2}\,du$, παρατηρούμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Λογισμού δίνει

$$g'(M) = -e^{-M^2}, \quad M > 0.$$

Έτσι ο κανόνας τού L'Hospital δίνει

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\int_M^{\infty} e^{-u^2}\,du}{e^{-M^2}} = \lim_{M\to\infty} \frac{g(M)}{e^{-M^2}} = \lim_{M\to\infty} \frac{-e^{-M^2}}{-2Me^{-M^2}} = 0.$$

Άρα υπάρχει $M_o > 0$ τέτοιο ώστε για $M \geq M_o$,

$$\int_M^{\infty} e^{-u^2}\,du \leq e^{-M^2}.$$

Στο διάστημα $[0, M_o]$ η συνάρτηση

$$\frac{\int_M^\infty e^{-u^2}\,du}{e^{-M^2}}$$

είναι φραγμένη ως συνεχής. Έτσι το λήμμα αποδείχθηκε.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη τής $(\mathbf{\Delta 4})$ για την ακολουθία συναρτήσεων $\{p_n\}$. Για $\delta > 0$, λόγω τού λήμματος,

$$\int_\delta^\infty p_n(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{n\delta/2}^\infty e^{-u^2}\,du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,C\,\exp\left(-\frac{n^2\delta^2}{4}\right) \to 0,$$

όταν $n \to \infty$ κι έτσι η $(\mathbf{\Delta 4})$ αποδείχθηκε.

Ορισμός 6.2.4 *Θεωρούμε δυό φραγμένες, συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:*

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\,dt < \infty \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^\infty |g(t)|\,dt < \infty.$$

Η **συνέλιξή** *των f, g είναι η συνάρτηση $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Με αλλαγή μεταβλητής αποδεικνύεται ότι $f * g = g * f$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty f(x-t)\,g(t)\,dt.$$

Η συνέλιξη και οι ακολουθίες Dirac παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση, κυρίως χάρη στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.5 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μιά φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Έστω K_n μιά ακολουθία Dirac. Θέτουμε $f_n = K_n * f$. Τότε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ σε κάθε κλειστό διάστημα τού $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη.
Λόγω της $(\mathbf{\Delta 3})$,

$$f(x) = f(x)\int_{-\infty}^\infty K_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty K_n(t) f(x)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,[f(x-t) - f(x)]\,dt \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ και ένα $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a-1, b+1]$. Άρα υπάρχει $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε γιά $x \in [a,b]$ και $|t| < \delta$ ισχύει

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon. \tag{6.12}$$

Η f είναι φραγμένη· έστω M ένα άνω φράγμα τής $|f|$. Λόγω της **(Δ4)**, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} K_n + \int_{\delta}^{\infty} K_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Από την (6.11), παίρνοντας απόλυτες τιμές, προκύπτει ότι για $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt. \tag{6.13}$$

Για να εκτιμήσουμε το πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|f(x-t) - f(x)| \leq 2M$ και παίρνουμε για $x \in \mathbb{R}$ και $n \geq n_o$,

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \leq 2M \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\,dt\right] < \varepsilon.$$

Για το μεσαίο ολοκλήρωμα στην (6.13), χρησιμοποιούμε την (6.12):

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,|f(x-t) - f(x)|\,dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon K_n = \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} K_n \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_n = \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $n \geq n_o$, $|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Άρα $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$. □

6.3 Το θεώρημα προσέγγισης τού Weierstrass

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η ακολουθία Landau είναι μια ακολουθία Dirac. Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα 6.2.5 στην ακολουθία Landau για να αποδείξουμε το ακόλουθο περίφημο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.1 (Θεώρημα τού Weierstrass) *Έστω f μιά συνάρτηση συνεχής στο $[a, b]$. Υπάρχει μιά ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}$ τέτοια ώστε $p_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[a, b]$.*

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα με τις επιπρόσθετες υποθέσεις $[a, b] = [0, 1]$ και $f(0) = f(1) = 0$. Επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $f(x) = 0$ για x έξω από το $[0, 1]$. Η επεκτεταμένη f είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Έστω $\{K_n\}$ η ακολουθία Landau (βλ. Παράδειγμα 6.2.2). Θέτουμε $p_n = K_n * f$. Από το Θεώρημα 6.2.5 προκύπτει $p_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[0, 1]$. Μένει να δείξουμε ότι κάθε p_n είναι πολυώνυμο. Ισχύει

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-t) f(t)\, dt = \int_0^1 K_n(x-t) f(t)\, dt.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η K_n είναι πολυώνυμο βαθμού $2n$ και ως προς x και ως προς t. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$K_n(x-t) = g_0(t) + g_1(t)x + g_2(t)x^2 + \cdots + g_{2n}(t)x^{2n},$$

όπου $g_0, g_1, \ldots, g_{2n}$ είναι πολυώνυμα ως προς t. Άρα

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n},$$

όπου

$$a_j = \int_0^1 g_j(t) f(t)\, dt.$$

Έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε με τις επιπρόσθετες υποθέσεις που κάναμε στην αρχή.

Αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα με μόνη επιπρόσθετη υπόθεση $[a, b] = [0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $h(0) = h(1) = 0$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{q_n\}$ με $q_n \xrightarrow{\text{ομ}} h$ στο $[0, 1]$. Τότε η ακολουθία πολυωνύμων

$$q_n - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, 1]$.

Τέλος αποδεικνύουμε το θεώρημα χωρίς καμιά επιπρόσθετη υπόθεση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : [a,b] \to [0,1]$ με

$$\phi(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Θέτουμε

$$g(y) = f \circ \phi^{-1}(y) = f((b-a)y + a), \quad y \in [0,1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Λόγω αυτών που αποδείξαμε μέχρι τώρα, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{r_n\}$ με $r_n \xrightarrow{o\mu} g$ στο $[0,1]$. Θέτουμε

$$p_n(x) = r_n \circ \phi(x) = r_n \left(\frac{x-a}{b-a} \right).$$

Η $\{p_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων και επιπλέον

$$p_n = r_n \circ \phi \xrightarrow{o\mu} g \circ \phi = f$$

στο $[a,b]$, (βλ. Άσκηση 4.8.30). □

Παράδειγμα 6.3.2 Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μιά συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, ισχύει

$$\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0. \tag{6.14}$$

Θα δείξουμε ότι τότε $f = 0$. Πράγματι, από το θεώρημα του Weierstrass, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n με $p_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a,b]$. Άρα $fp_n \xrightarrow{o\mu} f^2$ στο $[a,b]$. Επομένως

$$\int_a^b f^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b fp_n.$$

Όμως λόγω της (6.14), $\int_a^b fp_n = 0$ για κάθε n. Άρα $\int_a^b f^2 = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής έπεται ότι $f = 0$.

6.4 Ασκήσεις

6.4.1 Έστω E ένα μή κενό υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ο $B(E)$ με τή νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι νορμικός χώρος.

6.4.2 Δείξτε ότι $f_n \to f$ στο χώρο $B(E)$ αν και μόνο αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο E.

6.4.3 Δείξτε ότι ο $B(E)$ είναι πλήρης.

6.4.4 Δείξτε ότι ο χώρος $C_b(E) := C(E) \cap B(E)$ είναι κλειστός υποχώρος τού $B(E)$ (άρα και πλήρης).

6.4.5 Δείξτε ότι ο $B(E)$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων, δηλαδή αν $f, g \in B(E)$, τότε $fg \in B(E)$ και $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Επιπλέον δείξτε ότι, αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ στο χώρο $B(E)$, τότε $f_n g_n \to fg$ στο χώρο $B(E)$.

6.4.6 Μιά συνεχής συνάρτηση $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *πολυγωνική* αν υπάρχουν σημεία $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ τέτοια ώστε η q να είναι γραμμική σε καθένα από τα διαστήματα $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι αν $f \in C[a, b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυγωνικών συναρτήσεων $\{q_n\}$ τέτοια ώστε $q_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a, b]$.

6.4.7 Δείξτε ότι κάθε πολυγωνική συνάρτηση είναι Lipschitz. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις Lipschitz είναι πυκνές μέσα στον $C[a, b]$.

6.4.8 Με χρήση πολυγωνικών συναρτήσεων δείξτε ότι ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος χώρος.

6.4.9 Μια συνάρτηση $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ ονομάζεται *κλιμακωτή* αν υπάρχουν σημεία $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ τέτοια ώστε η s να είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $[x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι αν $f \in C[a, b]$, τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $\{q_n\}$ τέτοια ώστε $q_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a, b]$.

6.4.10 Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ στο $[a, b]$, δείξτε ότι το σύνολο $\{f\} \cup \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές στο χώρο $C[a, b]$.

6.4.11 Αν $\mathcal{F}$ είναι μιά ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων στο E, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο E.

6.4.12 Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο τού $C[a, b]$ είναι ισοσυνεχές.

6.4.13 Αν $\mathcal{F}$ είναι μιά ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων στο E, δείξτε ότι κάθε υποσύνολο της $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές.

6.4.14 Σωστό ή Λάθος; Αν κάθε συνάρτηση μιάς οικογένειας συναρτήσεων στο $(0, 1)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η οικογένεια είναι ισοσυνεχής.

6.4.15 Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι ένα ισοσυνεχές υποσύνολο του $C(K)$ είναι σημειακά φραγμένο αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

6.4.16 Έστω E ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Μιά οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F} \subset C(E)$ ονομάζεται ισοσυνεχής στο σημείο $x \in E$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in E \ \text{ με } |x - y| < \delta, \text{ ισχύει } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(α) Υποθέτουμε ότι το E είναι συμπαγές. Δείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο E αν και μόνο αν είναι ισοσυνεχής σε κάθε σημείο του E.
(β) Βρείτε μιά οικογένεια συναρτήσεων που είναι ισοσυνεχής σε κάθε σημείο τού $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι ισοσυνεχής στο $\mathbb{R}$.

6.4.17 Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αν $\{f_n\}$ είναι μιά ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία στο $C(K)$, δείξτε ότι το σύνολο $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και ισοσυνεχές.

6.4.18 Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια ισοσυνεχής οικογένεια στο K και η ακολουθία $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ συγκλίνει σημειακά στο K, δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

6.4.19 Έστω K συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$. Αν η ακολουθία $\{f_n\} \subset C(K)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει σημειακά στο K πρός τη μηδενική συνάρτηση, δείξτε ότι το σύνολο $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές.

6.4.20 Χρησιμοποιήστε τις Ασκήσεις 6.4.16-6.4.19 για να δώσετε μιά νέα απόδειξη του κριτηρίου του Dini (Θεώρημα 4.4.4).

6.4.21 Δίνονται ένα συμπαγές υποσύνολο K τού $\mathbb{R}$ και μιά ακολουθία $\{f_n\} \subset C(K)$. Αν το σύνολο $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές στο K, δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in K : \{f_n(x)\}$ συγκλίνει$\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του K.

6.4.22 Για μιά ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f'(x)| \leq 1, \ \ \forall x \in [a,b], \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν η $\{f_n\}$ είναι σημειακά φραγμένη, δείξτε ότι η $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

6.4.23 Δίνεται μιά ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ που είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Υποθέτουμε ότι η $\{f_n'\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο (a,b) και η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στο $[a,b]$. Δείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

6.4.24 Δίνονται αριθμοί K και α με $0 < K < \infty$ και $0 < \alpha \leq 1$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{f \in \mathrm{Lip}(K,\alpha) : f(0) = 0\}$$

είναι συμπαγές υποσύνολο τού $C[0,1]$.

6.4.25 Δίνεται μιά ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ που είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[a,b]$. Ορίζουμε

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt, \ \ x \in [a,b].$$

Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{F_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

6.4.26 Δίνονται ένα συμπαγές σύνολο K και μιά οικογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F} \subset C(K)$.
(α) Αν η $\mathcal{F}$ είναι σημειακά φραγμένη, δείξτε ότι και το περίβλημά της στο χώρο $C(K)$ είναι επίσης σημειακά φραγμένο.
(β) Αν η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δείξτε ότι και το περίβλημά της στο χώρο $C(K)$ είναι επίσης ομοιόμορφα φραγμένο.
(γ) Σωστό ή Λάθος; Αν η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής, τότε και το περίβλημά της στο χώρο $C(K)$ είναι επίσης ισοσυνεχές.

6.4.27 Δίνονται ένα συμπαγές σύνολο K και ένα σύνολο συναρτήσεων $\mathcal{F} \subset C(K)$. Δείξτε ότι το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές υποσύνολο τού $C(K)$ αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό, σημειακά φραγμένο, και ισοσυνεχές.

6.4.28 Ορίζουμε τον τελεστή $T : C[a,b] \to C[a,b]$ με την ισότητα $Tf\,(x) = \int_a^x f$. Δείξτε ότι ο T απεικονίζει τα φραγμένα σύνολα σε ισοσυνεχή (και άρα συμπαγή) σύνολα.

6.4.29 Έστω $K(x,y)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b] \times [a,b]$.
(α) Αν $f \in C[a,b]$ και $g(x) = \int_a^b f(t)K(x,t)\,dt$, δείξτε ότι $g \in C[a,b]$.
(β) Ορίζουμε τον τελεστή $T : C[a,b] \to C[a,b]$ με την ισότητα

$$Tf\,(x) = \int_a^b f(t)K(x,t)\,dt.$$

Δείξτε ότι ο T απεικονίζει τα φραγμένα σύνολα σε ισοσυνεχή σύνολα και ότι ο T είναι συνεχής.

6.4.30 Έστω $F(x,y)$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[0,1] \times [0,1]$. Γιά $y \in [0,1]$, ορίζουμε τη συνάρτηση $F_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F_y(x) = F(x,y)$. Δείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων $\{F_y : y \in [0,1]\}$ είναι ισοσυνεχές στο $[0,1]$.

6.4.31 Δείξτε ότι κάτω από τις υποθέσεις τού Ορισμού 6.2.4, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

που ορίζει τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.4.32 Δείξτε ότι κάτω από τις υποθέσεις τού Ορισμού 6.2.4
(α) $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$.
(β) $f * g = g * f$.

6.4.33 Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$K_n(t) = \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N},$$

είναι ακολουθία Dirac.

6.4.34 Δίνεται συναρτηση $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θετική, συνεχής, άρτια, ίση με το 0 έξω από ένα φραγμένο διάστημα και
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt = 1.$$
Ορίζουμε $K_n(t) = nK(nt)$. Δείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι ακολουθία Dirac.

6.4.35 Βρείτε μιά συγκεκριμένη συνάρτηση K όπως στην παραπάνω άσκηση που να είναι επιπλέον και άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

6.4.36 Έστω K μιά άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $K = 0$ έξω από ένα φραγμένο διάστημα. Έστω f μιά φραγμένη, συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $K * f$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και $(K * f)' = K' * f$.

6.4.37 (α) Αν p είναι ένα πολυώνυμο και $\varepsilon > 0$, δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q με ρητούς συντελεστές τέτοιο ώστε $\mathrm{d}_{[a,b]]}(p, q) < \varepsilon$.
(β) Δείξτε ότι ο $C[a, b]$ είναι διαχωρίσιμος.
(γ) Δείξτε ότι ο $C(\mathbb{R})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

6.4.38* Έστω $\mathcal{P}_n$ το σύνολο των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο τού n. Δείξτε ότι το $\mathcal{P}_n$ είναι $(n+1)$-διάστατος διανυσματικός υποχώρος τού $C[a, b]$. Δείξτε ότι το $\mathcal{P}_n$ είναι κλειστό υποσύνολο τού $C[a, b]$.
Σωστό ή Λάθος;
$$C[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n.$$

6.4.39 Έστω f μιά συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$. Το Θεώρημα τού Weierstrass εγγυάται την ύπαρξη μιάς ακολουθίας πολυωνύμων $\{p_n\}$ με $p_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[a, b]$. Έστω m_n ο βαθμός τού πολυωνύμου p_n. Αν η f δεν είναι πολυώνυμο, δείξτε ότι $m_n \to \infty$.

6.4.40 Αν η f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και $\varepsilon > 0$, δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

6.4.41 Κατασκευάστε μιά ακολουθία πολυωνύμων που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ αλλά η ακολουθία των παραγώγων δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

6.4.42* Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}$ τέτοια ώστε $p_n \xrightarrow{\sigma} 0$ στο $[0, 1]$ αλλά $\int_0^1 p_n(x)\,dx \to 3$.

6.4.43 Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $|f(x) - p(1/x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [1, \infty)$.

6.4.44* Μιά ακολουθία πολυωνύμων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση-όριο είναι πολυώνυμο.

6.5 Σημειώσεις

Η έννοια της ισοσυνέχειας μπορεί να οριστεί και για οικογένειες πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ): Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται ισοσυνεχής στο X αν αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall x, y \in X \ \text{ με } \rho(x,y) < \delta, \text{ ισχύει } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Τα Θεωρήματα 6.1.6 και 6.1.8 ισχύουν και σ' αυτό το γενικότερο πλαίσιο με τις ίδιες αποδείξεις.

Η έννοια της ισοσυνέχειας και το Θεώρημα Arzelà-Ascoli είναι συνεισφορές των Ιταλών μαθηματικών C.Arzelà και G.Ascoli. Η πρώτη ξεκάθαρη διατύπωση τού θεωρήματος για το χώρο $C[0,1]$ έγινε από τον Arzelá το 1895. Η γενίκευση τού θεωρήματος σε μετρικούς χώρους είναι έργο τού M.Fréchet το 1906. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα βιβλία [2], [5], [8]. Η έννοια της ισοσυνέχειας χρησιμοποιείται και στη Μιγαδική Ανάλυση· κυρίως στη θεωρία των κανονικών οικογενειών ολόμορφων ή αρμονικών συναρτήσεων. Βλ. [L.V.Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1979] και [W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1987].

Το θεώρημα τού Weierstrass για την πολυωνυμική προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων αποδείχθηκε το 1885. Μια σύντομη ιστορική επισκόπηση καθώς και άλλα σχετικά αποτελέσματα υπάρχουν στα άρθρα [[A.Shields, *Polynomial approximation*, Math. Intelligencer 9 (1987), 5-7], [E.R.Hedrick, *The significance of Weierstrass's theorem*, Amer. Math. Monthly 20 (1927), 211-213], [S.D.Fisher, *Quantitative approximation theory,* Amer. Math. Monthly 85 (1978), 318-332].

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις τού θεωρήματος. Η πιό στοιχειώδης οφείλεται στο Lebesgue και βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι πολυγωνικές συναρτήσεις είναι πυκνές στο $C[a,b]$. Για την απόδειξη αυτή βλ. [2, Ch.11]. Μιά άλλη απόδειξη έγινε από τον Sergei Bernstein το 1912· βλ. [2], [10]. Το θεώρημα τού Weierstrass μπορεί επίσης να προέλθει άμεσα από το θεώρημα τού Fejer για την αθροισιμότητα των σειρών Fourier· βλ. [1, Ch.11]. Η απόδειξη που δίνουμε στην §6.3 οφείλεται στον E.Landau. Την προτιμήσαμε διότι είναι από τεχνική άποψη απλή και εύκολη. Η απόδειξη αυτή υπάρχει και στα βιβλία [4], [8] και [S.Lang, *Undergraduate Analysis*, 2nd edition, Springer, 1997].

Οι έννοιες της συνέλιξης και των ακολουθιών Dirac έχουν μεγάλη σημασία στην Ανάλυση και μάλιστα στην Αρμονική. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο βιβλίο [6]

Σημαντικές γενικεύσεις τού θεωρήματος τού Weierstrass αποδείχθηκαν από τον M.H.Stone το 1937. Για τη θεωρία τού Stone παραπέμπουμε στα [2], [4], [5].

Βιβλιογραφία

[1] T. Apostol, *Mathematical Analysis.* Second Edition. Addison-Wesley Publ. 1974.

[2] N. L. Carothers, *Real Analysis.* Cambridge Univ. Press 2000.

[3] W. J. Kaczor, M.T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I, II, III.* American Mathematical Society 2000.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition. McGraw-Hill 1976.

[5] K. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis.* Wadsworth 1981.

[6] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral.* Marcel Dekker 1977.

[7] Απ. Γιαννόπουλος, *Εισαγωγή στην Ανάλυση I.* Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα

http://eudoxos.math.uoa.gr/ apgiannop

[8] Π. Ξενικάκης, *Πραγματική Ανάλυση.* Δεύτερη Έκδοση. Εκδ. Ζήτη 1999.

[9] Μ. Παπαδημητράκης, *Εισαγωγή στην Ανάλυση.* Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα

http://www.math.uoc.gr/ papadim/

[10] Μ. Παπαδημητράκης, *Εισαγωγή στην Ανάλυση II.* Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα

http://www.math.uoc.gr/ papadim/

Ευρετήριο